Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2012-10-25 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Adam Andersson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Bestäm det kortaste avståndet mellan parablerna $y = x^2 + 1$ och $x = y^2 + 1$. (6p)

Lösning: Avståndet mellan en godtycklig punkt (x_1, y_1) på kurvan $x = y^2 + 1$ och en annan godtycklig punkt (x_2, y_2) på kurvan $y = x^2 + 1$ ges av

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1^2 + 1 - x_2)^2 + (y_1 - (x_2^2 + 1))^2}$$

Vi vill nu bestämma x_2 och y_1 som gör att detta avstånd blir så litet som möjligt. För enkelhets skull minimierar vi istället kvadraten på avståndet och använder beteckningarna x och y istället för x_2 och y_1. Vi vill alltså bestämma det minsta värdet på;

$$f(x, y) = (y^2 + 1 - x)^2 + (y - (x^2 + 1))^2$$

Man inser lätt att problemet har en unik lösning (skissa kurvorna) och av symmetrisskäl måste det vara så att $y = x$ i denna lösning. Vi kan därför reducera problemet till att bestämma minsta värdet av;

$$g(x) = f(x, x) = 2(x^2 + 1 - x)^2$$

Eftersom $g'(x) = 4(x^2+1-x)(2x-1)$ och $x^2+1-x > 0$, för alla x, så är $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vi konstaterar således att det minsta värdet på $f(x, y)$ antas i punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ och att $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{9}{8}$.

Svar: Det kortaste avståndet mellan kurvorna är $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

7. Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{1}{x}e^{y^2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{y}e^{x}\mathbf{j}$ (6p)

Lösning: Fältlinjerna bestämms av differentialekvationen $\frac{dx}{F_1(x,y)} = \frac{dy}{F_2(x,y)}$.
I detta fall får vi att;

$$\frac{dx}{\frac{1}{x}e^{y^2}} = \frac{dy}{\frac{1}{y}e^{x}} \Leftrightarrow xe^x dx = ye^{y^2} \Leftrightarrow (x-1)e^x = \frac{1}{2}e^{y^2} + C$$

Svar: Fältlinjerna är implicit bestämda av $(x-1)e^x = \frac{1}{2}e^{y^2} + C$

8. (a) Laplaceoperatorn Δ till en reellvärd funktion av tre variabler $f(x,y,z)$ är given av $\Delta f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2$. För ett vektorfält $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ gäller att $\Delta\mathbf{F} = \Delta F_1\mathbf{i} + \Delta F_2\mathbf{j} + \Delta F_3\mathbf{k}$. Visa att

$$\Delta\mathbf{F} = \nabla(\nabla\bullet\mathbf{F}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}). \qquad (4p)$$

Lösning: Jag nöjer mig med att visa att den första komponenten (komposanten i x-led) i båda led är lika, de övriga visas på liknande vis. Första komponenten i högerledet är;

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)}_{\text{första komponenten i } \nabla(\nabla\bullet\mathbf{F})} - \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\right)}_{\text{första komponenten i } \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})} =$$

$$= \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial z\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}$$

vilket överenstämmer med första komponenten i vänsterledet dvs. ΔF_1. / VSB

(b) Ange ett resultat som tolkar $\nabla\bullet\mathbf{F}$ som utflödesintensitet/källproduktion. (2p)

Svar: Om $S_\epsilon(P)$ är sfären med centrum i P och med radie ϵ och $\hat{\mathbf{N}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen på denna sfär så är;

$$\mathbf{div}\mathbf{F}(P) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\epsilon^3} \iint_{\mathcal{S}_\epsilon(P)} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\, dS$$

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2012-10-25	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt C vara den del av sinuskurvan $y = \sin x$, där $0 \leq x \leq 2\pi$ (dvs. en periodlängd). Ställ upp en integral som ger längden på kurvan C (obs! integralen behöver inte beräknas). (2p)

Lösning: En parametrisering av kurvan C ges av; $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + \sin x\mathbf{j}$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Med denna parametrisering är; $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + \cos x\mathbf{j}$ och $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1+\cos^2 x}$ så;

Svar: Längden av C ges av integralen $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$.

(b) Antag att f är en reellvärd funktion av tre variabler. Uttryck $\dfrac{\partial}{\partial t} f(st, 2s, 3t)$ i de partiella derivatorna av f. (3p)

Svar: $sf_1(st, 2s, 3t) + 3f_3(st, 2s, 3t)$

(c) Bestäm den riktning i vilket riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = x^3 + y^2$ i punkten $(1, 2)$ är som störst, samt ange detta största värde. (3p)

Lösning: Riktningsderivatan $D_{\mathbf{v}} f(1, 2)$ är som störst i gradientens riktning dvs. då $\mathbf{v} = \nabla f(1, 2)/|\nabla f(1, 2)|$ och värdet på riktningsderivatan i denna riktning är $|\nabla f(1, 2)|$. Vi har $\nabla f(x, y) = 3x^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ och speciellt är $\nabla f(1, 2) = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ och $|\nabla f(1, 2)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Svar: Riktningsderivatan är som störst i riktningen $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ och antar då värdet 5.

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

(a) Funktionen f har tre kritiska punkter, varav en är $(1, 1)$. Bestäm de andra två. (3p)

Lösning: De kritiska punkterna är de punkter i vilket $\nabla f = \mathbf{0}$. Vi har;

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 4x^3 - 4y &= 0 \\ 4y^3 - 4x &= 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y = x^3 \\ x = x^9 \end{cases}$$

Vi har $x = x^9 \;\Leftrightarrow\; x(1 - x^8) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ eller $x = \pm 1$
så de kritiska punkterna är $(0, 0), (1, 1)$ och $(-1, -1)$.

Svar: De två andra kristiska punkterna är $(0, 0)$ och $(-1, -1)$.

(b) Bestäm karaktären hos alla de kritiska punkterna till funktionen f (dvs. avgör om de motsvarar lokala max, min eller sadelpunkter). (3p)

Lösning: För att bestämma karaktären hos de kristiska punkterna studerar vi funktionens Hessian $\mathcal{H}(x, y) = \begin{bmatrix} f_{11}(x, y) & f_{12}(x, y) \\ f_{21}(x, y) & f_{22}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$

Eftersom $\det(\mathcal{H}(0, 0)) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} < 0$ så är $(0, 0)$ en sadelpunkt.

Eftersom $\det(\mathcal{H}(\pm 1, \pm 1)) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} > 0$ och $f_{11}(\pm 1, \pm 1) > 0$
så är $(1, 1)$ och $(-1, -1)$ lokala minimipunkter.

Svar: $(0, 0)$ är en sadelpunkt och $(1, 1), (-1, -1)$ är lokala minimipunkter.

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt $\mathcal{S}$ vara den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ som ligger ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Beräkna arean av $\mathcal{S}$. (3p)

Lösning: I sfäriska koordinater beskrivas ytan av $\begin{cases} x = \sqrt{5}\sin\phi\cos\theta \\ y = \sqrt{5}\sin\phi\sin\theta \\ z = \sqrt{5}\cos\phi \end{cases}$, $\begin{matrix} 0 \le \phi \le \pi/4 \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{matrix}$

och uttryckt i parametrarna ϕ och θ är $dS = (\sqrt{5})^2 \sin\phi \, d\phi d\theta$ så;

$$\text{Arean av S} = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/4} 5\sin\phi \, d\phi \right) d\theta = 10\pi \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/4} = 10\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Svar: Arean av S är $10\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b) Låt D vara det område i xy-planet där $x^2 \le y \le 1$. Förklara varför $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dA$ skall betraktas som en generaliserad integral och avgör om den är konvergent eller divergent. (3p)

Lösning: Integrationsområdet D är begränsat men integranden är obegränsad i den del av D som ligger nära origo t.ex. kan vi notera att längs kurvan $y = x^2$ är integranden $\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{x^2}$, vilket antar obegränsat stora värden nära $x = 0$. Vidare är;

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dA = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} \frac{x^2}{y^2}\,dy \right) dx = \int_{-1}^{1} x^2 \left[\frac{-1}{y}\right]_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx < \infty$$

Svar: Integralen är generaliserad ty integranden är obegränsad på D.
Integralen är konvergent.

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Antag att ett kraftfält beskrivs av $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (y^2 + 1)\mathbf{k}$

(a) Beräkna $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$. (2p)

Lösning:

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + 2yz & y^2 + 1 \end{vmatrix} = (2y - 2y)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Svar: $\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$

(b) Beräkna det arbete som $\mathbf{F}$ uträttar på en partikel som rör sig raka sträckan från $(1, -1, 2)$ till $(0, 2, 1)$. (4p)

Lösning: Eftersom kraftfältet är virvelfritt på $\mathbb{R}^3$ (enligt a) så är fältet också konservativt på $\mathbb{R}^3$. Således är $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för någon potential ϕ och vi har $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \phi(0, 2, 1) - \phi(1, -1, 2)$, för varje (orienterad) kurva $\mathcal{C}$ från $(1, -1, 2)$ till $(0, 2, 1)$. Låt oss därför bestämma en potential till $\mathbf{F}$;

$$\mathbf{F} = \nabla\phi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \phi_1 = 2xy \\ \phi_2 = x^2 + 2yz \\ \phi_3 = y^2 + 1 \end{cases}$$

Den första ekvationen ger att $\phi = x^2y + g(y,z)$, för någon funktion g. Deriverar vi detta samband med avseende på y och kombinerar med ekvation 2 ovan så får vi att $g_1(y,z) = 2yz \Rightarrow g(y,z) = y^2z + h(z)$, för någon funktion h. Genom att utnyttja de två första ekvationerna ovan så kan vi alltså konstatera att $\phi = x^2y + y^2z + h(z)$, för någon funktion h. Deriverar vi detta samband med avseende på z och kombinerar med den tredje ekvationen i systemet ovan så får vi att $h'(z) = 1 \Rightarrow h(z) = z + C$, så vi konstaterar att $\phi = x^2y + y^2z + z + C$. Speciellt får vi att

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \phi(0,2,1) - \phi(1,-1,2) = 5 - 3 = 2$$

Svar: Arbetet som kraftfältet uträttar är 2.

5. Låt Ω vara det område i rummet som begränsas av ytan $z = 2 - x^2 - y^2$ och planet $z = 1$. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (y^2 + 1)\mathbf{k}$ ut ur Ω. (6p)

Lösning: Gauss's sats ger att;

$$\text{Flödet ut ur } \Omega = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{\Omega} \mathbf{div}\,\mathbf{F}\, dV = \iiint_{\Omega} (2y + 2z) dV =$$

$$= \iiint_{\Omega} 2z dV = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_1^{2-x^2-y^2} 2z dz \right) dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left[z^2\right]_1^{2-x^2-y^2} dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left((2 - x^2 - y^2)^2 - 1\right) dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 ((2 - r^2)^2 - 1) r dr \right) d\theta = 2\pi \left[\frac{-1}{6}(2 - r^2)^3 - \frac{1}{2}r^2 \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{-1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{8}{6} \right) = \frac{4\pi}{3}$$

Svar: Flödet ut ur Ω är $4\pi/3$.