Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2013-01-16 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Adam Andersson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se nästa blad

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se blad 3

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Visa att man med variabelbytet $\xi = x$, $\eta = 2x - t$ kan omvandla differentialekvationen;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial t} = x + t \tag{1}$$

till differentialekvationen;

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 3\xi - \eta \tag{2}$$

Använd sedan denna omskrivningen för att bestämma den allmänna lösningen till (1). (6p)

7. Låt $\mathcal{C}_\epsilon$ vara skärningskurvan mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$ (där ϵ är ett fixt positivt tal) och planet $x + y + z = 0$, orienterad medurs sett uppifrån. Beräkna cirkulationen $\int_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ av hastighetsfältet $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ runt $\mathcal{C}_\epsilon$. Beräkna speciellt gränsvärdet;

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_{\mathcal{C}_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$ (6p)

8. Antag att $f(x, y, z)$ är differentierbar i en punkt (a, b, c) och att $\nabla f(a, b, c) \neq 0$. Visa då att $\nabla f(a, b, c)$ är en normalvektor till nivåytan $f(x, y, z) = C$ genom (a, b, c). (6p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Formelblad för TMA043 och MVE085, 12/13

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2013-01-16	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) I vilka punkter $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ är $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & , \text{då} \quad x \neq y \\ x^2 & , \text{då} \quad x = y \end{cases}$ kontinuerlig.
(motivera ditt svar!) (2p)

Svar och motivering:

. . . .

(b) Parametrisera skärningskurvan mellan planet $x+y = 1$ och paraboloiden $z = x^2+y^2$. Bestäm även en tangentvektor $\mathbf{v}$ till skärningskurvan i punkten $(2, -1, 5)$. (3p)

Lösning:

Svar: . . . .

(c) Bestäm Jacobimatrisen $D\mathbf{f}(x, y)$ till den funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som ges av $\mathbf{f}(x, y) = (xy, x^2+y^2)$. Beräkna speciellt $D\mathbf{f}(2, 1)$ och använd bl.a. denna matris för att bestämma ett approximativt värde på $\mathbf{f}(2.1, 0.8)$. (3p)

Lösning:

Svar: . . . .

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Använd Lagrange multiplikatormetod för att bestämma det kortaste och längsta avståndet från punkten $(1, -2, 2)$ till sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (6p)

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys V2 2013-01-16**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Ange sambandet mellan Cartesiska och sfäriska koordinater. Beskriv sedan i sfäriska koordinater det område Ω som i Cartesiska koordinater bestäms av att $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$ och $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ (3p)

Lösning/Svar:

....

(b) Beräkna trippelintegralen $\iiint_K xy\, dV$, där K är det område i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av koordinatplanen $x=0, y=0, z=0$, samt planen $z=1-x$ och $y=1$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} - x^3\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara cirkeln $x^2+y^2=2$ orienterad medurs.

(a) Illustrera hur vektorfältet $\mathbf{F}$ varierar utefter kurvan $\mathcal{C}$ genom att skissa vektorfältspilar (som indikerar vektorfältets storlek och riktning) i 8 punkter på cirkeln. (2p)

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} y^3 dx - x^3 dy$ (4p)

5. Låt $\mathcal{S}$ vara den yta som parametriseras av $\mathbf{r} = (u+v)\mathbf{i}+(u-v)\mathbf{j}+uv\mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2$.

(a) Ange en normalvektor $\mathbf{N}$ till ytan $\mathcal{S}$ i punkten $(2,0,1)$ (3p)

(b) Beräkna storleken på flödet av hastighetsfältet $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ genom ytan $\mathcal{S}$. (3p)