Deltentamen
godkäntdelen, del 1

MVE085 Flervariabelanalys

2014-09-27 kl. 8:30-11:30

Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Åse Fahlander, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltenta täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Godkäntdelen, del 1

se uppgift 1:abc och 2 på nästa blad

Lycka till!
Dennis Eriksson

Formelblad för TMA043 och MVE085, 14/15

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys 2014-09-27**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående deluppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt $f(x, y) = e^{x\cos y}$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(0,\, \pi,\, 1)$. (2p)

Lösning: I den givna punkten $(x_0,\, y_0,\, z_0) = (0,\, \pi,\, 1)$ har vi

$$f_x = \cos y\, e^{x\cos y} = -1, \quad f_y = -x\sin y\, e^{x\cos y} = 0.$$

Tangentplanets ekvation lyder

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0).$$

Insättning leder till ekvationen $x + z = 1$.

(b) Bestäm $\dfrac{\partial}{\partial s} f(x, y)$ samt $\dfrac{\partial^2}{\partial s^2} f(x, y)$, där $f(x, y) = e^{xy}$, $x = s^2 t$ och $y = (\sin s)t^2$. (3p)

Lösning 1: Notera först att

$$f_x = ye^{xy}, \quad f_y = xe^{xy}, \tag{1}$$

$$f_{xx} = y^2 e^{xy}, \quad f_{xy} = f_{yx} = (1 + xy)e^{xy}, \quad f_{yy} = x^2 e^{xy}. \tag{2}$$

Första gången vi deriverar får vi enligt kedjeregeln,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = f_x(2st) + f_y(\cos s)t^2 = e^{xy}\left[2sty + (\cos s)t^2 x\right].$$

Andra deriveringen är per definition

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left[f_x(2st) + f_y(\cos s)t^2\right] = 2t\frac{\partial}{\partial s}(sf_x) + t^2\frac{\partial}{\partial s}\left[(\cos s)f_y\right]. \tag{3}$$

Nu måste vi använda både produktregeln och kedjeregeln. Först har vi

$$\frac{\partial}{\partial s}(sf_x) = f_x \cdot 1 + s\frac{\partial f_x}{\partial s} = f_x + s\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) =$$

$$= f_x + s\left[2stf_{xx} + (\cos s)t^2 f_{xy}\right] = e^{xy}\left[y + 2s^2ty^2 + (\cos s)st^2(1 + xy)\right].$$

På samma sätt får vi

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[(\cos s)f_y\right] = (-\sin s)f_y + (\cos s)\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) =$$

$$= (-\sin s)f_y + (\cos s)\left[f_{yx}(2st) + f_{yy}(\cos s)t^2\right] = e^{xy}\left[-x(\sin s) + 2(1 + xy)st(\cos s) + x^2t^2\cos^2 s\right].$$

Insättning i (3) ger slutligen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = e^{xy}\left[-(\sin s)t^2 x + 2ty + (\cos^2 s)t^4 x^2 + 4s(\cos s)t^3(1 + xy) + 4s^2t^2y^2\right].$$

Man kan substituera $x = s^2 t$, $y = (\sin s)t^2$ och skriva både $\partial f/\partial s$ och $\partial^2 f/\partial s^2$ endast i termer av s och t om man känner för det, men det är inte nödvändigt. Se dock den alternativa lösningen nedan.

Lösning 2: Det blir lite lättare uträkningar om man substituerar direkt för x och y och skriver f från början som en funktion av s och t enligt

$$f(s,t) = e^{(s^2t)((\sin s)t^2)} = e^{s^2(\sin s)t^3}.$$

Då har vi enligt 1-variabels kedjeregeln samt produktregeln att

$$\frac{\partial f}{\partial s} = t^3\left[s^2(\cos s) + 2s(\sin s)\right]e^{s^2(\sin s)t^3}.$$

Ytterligare tillämpning av samma två regler ger såsmåningom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = t^3\, e^{s^2(\sin s)t^3}\ \left[(2s\cos s - s^2\sin s) + (2s\cos s + 2\sin s) + t^3(s^2\cos s + 2s\sin s)^2\right] =$$
$$= t^3\, e^{s^2(\sin s)t^3}\ \left[t^3(s^2\cos s + 2s\sin s)^2 + 4s\cos s + (2 - s^2)\sin s\right].$$

(c) Betrakta kurvan som ges av $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\,\mathbf{j}\ ,\ 0 \le t \le 1$. Antag att parametriseringen beskriver rörelsen hos en partikel. Bestäm partikelns hastighet (velocity) som en funktion av t. Bestäm sedan kurvans längd. (3p)
Lösning: Hastigheten ges av

$$\mathbf{r}'(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}.$$

Kurvans längd ges sedan av

$$\int_0^1 ||\mathbf{r}'(t)||\,dt = \int_0^1 \sqrt{t^2 + (t^2)^2}\,dt = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt.$$

Detta är en standard integral som bestäms via substitutionen $u = 1 + t^2$. Längden blir således

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,du = \cdots = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x,y) = x + y + \frac{8}{xy}$ med definitionsmängd $x > 0$, $y > 0$.

(a) Bestäm den unika kritiska punkten till f och avgör huruvida den är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller ingetdera. (3p)

(b) Bestäm de största och minsta värdena som antas av f i det kvadratiska området $1 \le x \le 3$, $1 \le y \le 3$. (2p)

(c) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(1,1)$. Ange svaret på formen $f(1+h, 1+k) \approx \ldots$. (1p)

Lösning (a): Den kritiska punkten uppfyller

$$0 = f_x = 1 - \frac{8}{x^2y} \ \Rightarrow\ x^2y = 8. \tag{4}$$
$$0 = f_y = 1 - \frac{8}{xy^2} \ \Rightarrow\ xy^2 = 8. \tag{5}$$

Från (4) och (5) härleder vi lätt att $x = y = 2$ så den unika kritiska punkten är $(2,2)$.

För att klassificera den använder vi andra derivatans test. I punkten $(2,2)$ har vi

$$A = f_{xx} = \frac{16}{x^3y} = 1,\quad B = f_{xy} = f_{yx} = \frac{8}{x^2y^2} = \frac{1}{2},\quad C = f_{yy} = \frac{16}{xy^3} = 1. \tag{6}$$

Således är $B^2 - AC = -\frac{3}{4} < 0$ samt $A > 0$ som innebär att den kritiska punkten är ett lokalt minimum.

(b): Punkten $(2,2)$ ligger innanför området och är därmed en kandidat till ett minimum. Vi noterar att $f(2,2) = 2 + 2 + \frac{8}{2\cdot 2} = 6$. Näst undersöker vi randen, som består av fyra sträckor, två horisontella och två vertikala. Notera dock att f är symmetrisk i x och y, dvs $f(x,y) = f(y,x)$. Därmed räcker det att undersöka de horisontella sträckorna.

Längs sträckan $x = 1$ har vi $f(1,y) = 1 + y + 8/y := g(y)$, säg. Vi har $g'(y) = 1 - 8/y^2$ så det finns en kritisk punkt vid $y = 2\sqrt{2}$. Vi har $g(2\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2} + 8/2\sqrt{2} = 1 + 4\sqrt{2}$. Ändpunkterna är vid $y = 1$ och $y = 3$ där vi har $g(1) = 10$ och $g(3) = 20/3$.

Längs sträckan $x = 3$ har vi $f(3,y) = 3 + y + 8/3y := h(y)$, säg. Vi har $h'(y) = 1 - 8/3y^2$ så det finns en kritisk punkt vid $y = \sqrt{8/3}$. Vi har $g(\sqrt{8/3}) = 3 + \sqrt{8/3} + \frac{8}{3\sqrt{8/3}} = \frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Ändpunkterna är vid $y = 1$ och $y = 3$ där vi har $h(1) = 20/3$ och $h(3) = 62/9$.

Totalt har vi alltså sju kandidatvärden för max och min, nämligen

$$6,\ 1 + 4\sqrt{2},\ 10,\ \frac{20}{3},\ \frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \frac{20}{3},\ \frac{62}{9}.$$

Det är klart att 10 är störst och man kan kontrollera att 6 är minst.

Obs! Det finns ett mycket enklare sätt att se att 6 är det minsta värdet. Funktionen $f(x,y)$ är alltid positiv inom sin definitionsmängd och går mot oändlighet då $x \to \infty$ och $y \to \infty$, men också då $x \to 0$ eller $y \to 0$. Detta medför att f måste ha ett globalt minimum inom sin definitionsmängd, som måste då antas i en kritisk punkt.

(c): Formeln lyder

$$f(1+h,\, 1+k) \approx f(1,1) + (hf_x + kf_y) + \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\right). \tag{7}$$

Vi har $f(1,1) = 1 + 1 + 8 = 10$. Vi måste beräkna derivatorna i $(1,1)$ och vi har redan formlerna för dessa i (4), (5) och (6). Insättning av $(1,1)$ ger

$$f_x = f_y = -7, \quad f_{xx} = f_{yy} = 16, \quad f_{xy} = 8.$$

Insättning sedan i (7) ger svaret:

$$f(1+h,\, 1+k) \approx 10 - 7(h+k) + 8(h^2 + hk + k^2).$$