# Deltentamen
# godkäntdelen, del 1

## MVE085 Flervariabelanalys

### 2015-09-26 kl. 8:30-11:30

**Examinator:** Dennis Eriksson , Institutionen för matematiska vetenskaper, Chalmers

**Telefonvakt:** Edvin Wedin, telefon: 0703-088304

**Hjälpmedel:** bifogat formelblad, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltenta täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs normalt att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Alternativt kan man klara tentan genom att få 25 poäng totalt på del 1, del 2 och med bonuspoäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen. För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället.

---

## Godkäntdelen, del 1

se uppgift 1 och 2 på nästa blad

Lycka till!
Dennis Eriksson

## Formelblad för TMA044 och MVE085, 15/16

### Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

### Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \;,\; 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \;,\; a \neq 0 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0 \qquad \int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \;,\; a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \;,\; a \neq 0 \qquad \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

### Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

### Övrigt

Masscentrum $(x_T, y_T, z_T)$ för $\Omega$ ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för $y_T, z_T$.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

| Anonym kod | MVE085 Flervariabelanalys 2015-09-26 | sid.nummer | Poäng |
|---|---|---|---|
| | | | |

## Godkäntdelen: del 1

**1.** Till nedanstående deluppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) i. Ange om följande påstående om en godtycklig funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är sant eller falskt. (0.5p)

**Påstående:** *Om $f(x, y)$ har ett gränsvärde $L$ då $(x, y) \to (a, b)$ så gäller att $f(a, b) = L$.*

**Svar:** *Falskt.*

(För att $f(a, b)$ skall vara lika med gränsvärdet $L$ då $(x, y) \to (a, b)$ så krävs att $f$ är kontinuerlig i $(a, b)$.)

ii. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Vilket eller vilka av följande påståenden är sanna? Ni får ringa in *max tre alternativ* (bokstäver); för fler än tre angivna alternativ blir det 0 poäng. Varje rätt svar ger 0.5p. (1.5p)

**A** Gradienten till Jacobianen av $f$ i en punkt $(a, b)$ är Hessianen av $f$ i $(a, b)$.

**B** Jacobianen till gradienten av $f$ i en punkt $(a, b)$ är Hessianen av $f$ i $(a, b)$.

**C** Jacobianen kan ses som en "flervariabel-analog" till andra-derivatan av en funktion $f(x)$.

**D** Hessianen kan ses som en "flervariabel-analog" till andra-derivatan av en funktion $f(x)$.

**E** Om $L_f$ är linjäriseringen av $f$ i en punkt $(a, b)$ så innebär det att om $f(x, y) - L_f(x, y)$ är litet så ligger $(x, y)$ nära $(a, b)$.

**F** Om $L_f$ är linjäriseringen av $f$ i en punkt $(a, b)$ så innebär det att då $(x, y)$ är nära $(a, b)$ så är $f(x, y) - L_f(x, y)$ litet.

**G** Om determinanten av Hessianen $H(f)$ i en punkt $(a, b)$ är noll så är $(a, b)$ en sadelpunkt.

**Svar:** *Rätt svar är* **B, D, F**

(b) Antag att en partikel rör sig genom rummet $\mathbb{R}^3$ enligt en kurva som beskrivs av positionsvektorn $\mathbf{r}(t) = \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, där $t$ är en parameter som motsvarar tiden. Bestäm partikelns fart efter 1 tidsenhet. Vilken punkt i rummet befinner sig partikeln i vid denna tidpunkt? Beräkna längden på kurvan som partikeln spårar ut mellan $t = 0$ och $t = 1$.

**Lösning:** Hastigheten blir $\mathbf{r}'(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ och farten $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 4}$. (3p)
Efter en tidsenhet, i.e. vid $t = 1$, rör sig således partikeln med farten

$$|\mathbf{r}'(1)| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Parametriseringen av $x, y, z$ längs kurvan ges av $x(t) = t^3/3$, $y(t) = t^2$, $z(t) = 2t$. Efter en tidsenhet befinner sig partikeln därför i punkten

$$\begin{aligned} x(1) &= 1/3 \\ y(1) &= 1 \\ z(1) &= 2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Längden på kurvan efter en tidsenhet ges av

$$\int_0^1 |\mathbf{r}'(t)|dt = \int_0^1 \sqrt{t^4 + 4t^2 + 4}dt. \qquad (2)$$

För att beräkna integralen noterar vi först att uttrycket under rottecknet kan kvadratkompletteras:

$$t^4 + 4t^2 + 4 = (t^2 + 2)^2. \tag{3}$$

Vi får således den enklare integralen

$$\int_0^1 (t^2 + 2)dt = \left[\frac{t^3}{3} + 2t\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}. \tag{4}$$

**Svar:** Farten vid $t = 1$ är $|\mathbf{r}'(1)| = 3$, partikeln befinner sig då i punkten $(1/3, 1, 2)$. Kurvlängden vid $t = 1$ är $7/3$.

(c) Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler där godtyckligt många kontinuerliga partiella derivator existerar, och där $x = uv$ och $y = u - v$. Bestäm derivatorna $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ uttryckt i de partiella derivatorna $f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$. (3p)

**Lösning:** Studera $f(x, y)$ med $x(u, v) = uv$ och $y(u, v) = u - v$.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_1 x_1 + f_2 y_1, \tag{5}$$

där vi definierat

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad y_1 = \frac{\partial y}{\partial u}. \tag{6}$$

Vi fortsätter att beräkna andraderivatan:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}(f_1 x_1 + f_2 y_1) = \frac{\partial}{\partial v}(f_1 x_1) + \frac{\partial}{\partial v}(f_2 y_1). \tag{7}$$

För att beräkna de återstående derivatorna måste vi använda både kedjeregeln och produktregeln. Detta ger:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}(f_1 x_1) + \frac{\partial}{\partial v}(f_2 y_1) &= (f_{11} x_2 + f_{12} y_2) x_1 + f_1 x_{12} \\ &+ (f_{21} x_2 + f_{22} y_2) y_1 + f_2 y_{12}. \end{aligned} \tag{8}$$

Beräkna nu derivatorna av $x(u, v)$ och $y(u, v)$:

$$\begin{aligned} &x_1 = v, \quad x_2 = u, \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 1, \quad x_{22} = 0, \\ &y_1 = 1, \quad y_2 = -1, \quad y_{11} = 0, \quad y_{12} = 0, \quad y_{22} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Insättning i (8) och utnyttjande av att $f_{12} = f_{21}$ ger slutligen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} &= uv f_{11} + (u - v) f_{12} - f_{22} + f_1 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}. \end{aligned} \tag{10}$$

Den sista likheten följer av att partiella derivator kommuterar: $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2}{\partial v \partial u}$. Således behöver vi inte räkna ut båda mixade andraderivatorna.

**Svar:** $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = uv f_{11} + (u - v) f_{12} - f_{22} + f_1$.

(d) Låt $f(x, y) = e^{x \sin y}$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(0,\, \pi,\, 1)$. (2p)

**Lösning:** Ekvationen för tangentplanet till en yta $z = f(x, y)$ i en punkt $(a, b)$ ges av

$$f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0. \tag{11}$$

Vi beräknar de partiella derivatorna av $f(x, y) = e^{x \sin y}$:

$$f_1(x, y) = \sin y\, e^{x \sin y}, \qquad f_2(x, y) = x \cos y\, e^{x \sin y}. \tag{12}$$

I punkten $(0, \pi, 1)$ har vi då

Tangentplanets ekvation blir således i punkten $(0, \pi, 1)$:

$$0 = -(z-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = 1 \tag{14}$$

**Svar:** Tangentplanets ekvation till $z = e^{x\cos y}$ i punkten $(0, \pi, 1)$ är $z = 1$. Detta är $xy$-planet genom punkten 1 på $z$-axeln.

**Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.**

**2**. Låt $f(x, y) = xy - x^3y - xy^3$.

(a) Hitta och klassificera kritiska punkter till $f$ i första kvadranten (där jag avser med första kvadranten alla $(x, y)$ så att $x \geq 0, y \geq 0$). (2p)

(b) Bestäm maximum till $f$ inom kvadraten som begränsas av hörnen $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$. (1p)

(c) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(1/2, 1/2)$. Ange svaret på formen $f(1/2 + h, 1/2 + k) \approx \ldots$. (1p)

**Lösning:**

(a)

Vi börjar med att söka efter kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = xy - x^3y - xy^3$ i den första kvadranten som bestäms av $x \geq 0, y \geq 0$. De partiella derivatorna ger:

$$f_1(x, y) = y - 3x^2y - y^3 = 0 \tag{15}$$

$$f_2(x, y) = x - x^3 - 3xy^2 = 0. \tag{16}$$

Vi noterar genast att det finns en uppenbar lösning i $(x, y) = (0, 0)$. Om $x = 0$, är andra ekvationen automatiskt uppfylld och första ekvationen reducerar till $y - y^3 = 0$, och vi får ytterliggare en lösning $y = 1$. På samma sätt om $y = 0$ hittar vi ytterliggare en lösning $(1, 0)$. För att hitta fler lösningar antar vi nu att $x > 0, y > 0$. Vi kan då dela med $y$ i ekv. (15) och dela med $x$ i ekv. (16) vilket ger de förenklade ekvationerna:

$$1 - 3x^2 - y^2 = 0 \tag{17}$$

$$1 - x^2 - 3y^2 = 0. \tag{18}$$

Vi lägger nu ihop dessa ekvationer, vilket ger:

$$(17) + (18) \qquad \Longleftrightarrow \qquad -x^2 + y^2 = 0. \tag{19}$$

Vi utnyttjar nu detta resultat i ekvation (18):

$$0 = 1 - x^2 - 3y^2 = \{y^2 = x^2\} = 1 - x^2 - 3x^2 = 1 - 4x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = 1/4. \tag{20}$$

Vi får således $x^2 = y^2 = 1/4$ vilket ger oss 4 kritiska punkter:

$$(1/2, 1/2), \quad (-1/2, 1/2), \quad (1/2, -1/2), \quad (-1/2, -1/2). \tag{21}$$

Av dessa ligger dock endast $(1/2, 1/2)$ i den första kvadranten. Vi har alltså hittat följande fyra kritiska punkter i den första kvadranten:

$$(0, 0) \quad (1, 0) \quad (0, 1) \quad \text{och} \quad (1/2, 1/2). \tag{22}$$

Nu måste vi kontrollera vilken karaktär dessa punkter har. Beräkna Hessianen:

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6xy & 1 - 3x^2 - 3y^2 \\ 1 - 3x^2 - 3y^2 & -6xy \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Determinanten blir

$$\det H(f)\big|_{(0,0)} = -1 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{indefinit.} \tag{25}$$

Alternativt, om man använder $B^2 - AC$-kriteriet, så är $-\det H(f) = B^2 - AC = 1^2 - 0 \cdot 0 > 0$. Vi drar därför slutsatsen att $(0,0)$ är en *sadelpunkt*, med värdet $f(0,0) = 0$. På samma sätt hittar vi att $(1,0)$ och $(0,1)$ är sadelpunkter.
För punkten $(1/2, 1/2)$ får vi:

$$H(f)\big|_{(1/2,1/2)} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \tag{26}$$

med determinant

$$\det H(f)\big|_{(1/2,1/2)} = \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = 2 > 0. \tag{27}$$

Dessutom ser vi att första matriselementet är negativt, $f_{11} = -3/2 < 0$, vilket innebär att Hessianen är negativt definit. Vi drar då slutsatsen att $(1/2, 1/2)$ är ett *lokalt maximum* där funktionen tar värdet $f(1/2, 1/2) = 1/8$.

**Svar:** Kritiska punkter på den första kvadraten är $(0,0)$ och $(1/2, 1/2)$, varav den första är en sadelpunkt med värdet $f(0,0) = 0$ och den andra är ett lokalt maximum med värdet $f(1/2, 1/2) = 1/8$.

(b)
Bestäm maximum av $f(x,y)$ på kvadraten med hörn $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$. Vi vet redan att det finns en kritisk punkt inuti kvadraten i $(1/2, 1/2)$ och en i origo $(0,0)$. Det som återstår är att kontrollera randen av områden. Vi kontrollerar de 4 linjesegmenten som omsluter kvadraten separat.

- $x$-axeln: På linjen mellan $0 \leq x \leq 1$ har vi $f(x,0) = 0$ och således får vi ingen ny maxpunkt längs denna linje.
- $y$-axeln: Längs $y$-axeln får vi $f(0,y) = 0$ och således har vi inga maxpunkter.
- $x = 1$: Längs linjen $x = 1$ har vi $f(1,y) = -y^3 = g(y)$. Vi söker kritiska punkter: $g'(y) = -3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Den kritiska punkten ligger i $(1,0)$ med värdet $f(1,0) = 0$. Detta ger heller inget nytt max.
- $y = 1$: Längs linjen $y = 1$ har vi $f(x,1) = -x^3$ och vi får samma resultat som i föregående, med kritisk punkt i $(0,1)$ med värde $f(0,1) = 0$.
- Slutligen måste vi kontrollera det återstående hörnet $(1,1)$ vilket utgör en del av randen till linjesegmenten $x = 1$ och $y = 1$. Här får vi $f(1,1) = 1 - 1 - 1 = -1$ vilket är en minpunkt.

Slutsatsen blir att maximum av $f(x,y)$ på kvadraten återfinns i mittpunkten:

$$f(1/2, 1/2) = 1/8. \tag{28}$$

**Svar:** Funktionen $f(x,y)$ antar sitt maxvärde $1/8$ i mitten av kvadraten $(1/2, 1/2)$.

(c)
Beräkna Taylorpolynomet av $f(x,y)$ till ordning 2 i punkten $(1/2, 1/2)$. Den allmänna formen är:

$$\begin{aligned} f(1/2+h, 1/2+k) \ &\simeq \ f(1/2,1/2) + \nabla f(1/2,1/2) \cdot (h,k) \\ &+ \ \frac{1}{2}\Big[h^2 f_{11}(1/2,1/2) + 2hk f_{12}(1/2,1/2) + k^2 f_{22}(1/2,1/2)\Big]. \end{aligned} \tag{29}$$

Den andra termen försvinner eftersom $\nabla f(1/2, 1/2) = 0$. Andraderivatorna i $(1/2, 1/2)$ läser vi av från Hessianen (25):

Insättning i Taylorpolynomet ger då slutligen:

$$\begin{aligned} f(1/2+h, 1/2+k) &\simeq \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\Big[h^2\left(-\frac{3}{2}\right) + 2hk\left(-\frac{1}{2}\right) + k^2\left(-\frac{3}{2}\right)\Big] \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\Big[3(h^2+k^2) + 2hk\Big] \end{aligned} \tag{31}$$

**Svar:** Taylorpolynomet i $(1/2, 1/2)$ ges av: $f(1/2+h, 1/2+k) \simeq \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\Big[3(h^2+k^2)+2hk\Big]$.