Deltentamen
godkäntdelen, del 1

MVE085 Flervariabelanalys

2015-09-26 kl. 8:30-11:30

Examinator: Dennis Eriksson , Institutionen för matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Edvin Wedin, telefon: 0703-088304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltenta täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs normalt att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Alternativt kan man klara tentan genom att få 25 poäng totalt på del 1, del 2 och med bonuspoäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen. För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Godkäntdelen, del 1

se uppgift 1 och 2 på nästa blad

Lycka till!
Dennis Eriksson

Formelblad för TMA044 och MVE085, 15/16

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2015-09-26	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående deluppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) i. Ange om följande påstående om en godtycklig funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är sant eller falskt. (0.5p)

Påstående: *Om $f(x, y)$ har ett gränsvärde L då $(x, y) \to (a, b)$ så gäller att $f(a, b) = L$.*

Svar: ....

ii. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Vilket eller vilka av följande påståenden är sanna? Ni får ringa in *max tre alternativ* (bokstäver); för fler än tre angivna alternativ blir det 0 poäng. Varje rätt svar ger 0.5p. (1.5p)

A Gradienten till Jacobianen av f i en punkt (a, b) är Hessianen av f i (a, b).

B Jacobianen till gradienten av f i en punkt (a, b) är Hessianen av f i (a, b).

C Jacobianen kan ses som en "flervariabel-analog" till andra-derivatan av en funktion $f(x)$.

D Hessianen kan ses som en "flervariabel-analog" till andra-derivatan av en funktion $f(x)$.

E Om L_f är linjäriseringen av f i en punkt (a, b) så innebär det att om $f(x, y) - L_f(x, y)$ är litet så ligger (x, y) nära (a, b).

F Om L_f är linjäriseringen av f i en punkt (a, b) så innebär det att då (x, y) är nära (a, b) så är $f(x, y) - L_f(x, y)$ litet.

G Om determinanten av Hessianen $H(f)$ i en punkt (a, b) är noll så är (a, b) en sadelpunkt.

(b) Antag att en partikel rör sig genom rummet $\mathbb{R}^3$ enligt en kurva som beskrivs av positionsvektorn $\mathbf{r}(t) = \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, där t är en parameter som motsvarar tiden. Bestäm partikelns fart efter 1 tidsenhet. Vilken punkt i rummet befinner sig partikeln i vid denna tidpunkt? Beräkna längden på kurvan som partikeln spårar ut mellan $t = 0$ och $t = 1$.

Lösning: (3p)

Svar: ....

(c) Låt $f(x,y)$ vara en funktion av två variabler där godtyckligt många kontinuerliga partiella derivator existerar, och där $x = uv$ och $y = u - v$. Bestäm derivatorna $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ uttryckt i de partiella derivatorna $f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Låt $f(x,y) = e^{x \sin y}$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(0,\, \pi,\, 1)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x,y) = xy - x^3y - xy^3$.

(a) Hitta och klassificera kritiska punkter till f i första kvadranten (där jag avser med första kvadranten alla (x,y) så att $x \geq 0, y \geq 0$). (2p)

(b) Bestäm maximum till f inom kvadraten som begränsas av hörnen $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$. (1p)

(c) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(1/2, 1/2)$. Ange svaret på formen $f(1/2+h, 1/2+k) \approx \ldots.$ (1p)