

Tentamen

MVE085 Flervariabelanalys - Omtenta

2017-12-19 kl. 8.30–12.30

Examinator: Dennis Eriksson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Milo Viviani, telefon: anknytning 5325

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-7 se sidan 5

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

8. Låt $\mathbf{F}(x, y, z)$ vara ett vektorfält med vektorpotential $\mathbf{A}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + (2xz + xy)\mathbf{j} + 3xy\mathbf{k}$, dvs vi kan skriva

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

- (a) Beräkna vektorfältet $\mathbf{F}$. (2p)

- (b) Låt S vara halvsfären $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \leq 1$. Beräkna flödet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

ut genom S med hjälp av Stokes sats. (4p)

9. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett överallt definierat vektorfält.

- (a) Låt C_1 och C_2 vara två kurvor som börjar i en punkt P_1 och slutar i en punkt P_2 . Använd Greens sats för att beräkna skillnaden $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ i termer av dubbelintegraler. (4p)

- (b) Använd ovanstående observation och lämpliga identiteter för att bevisa att om $\mathbf{F}$ är konservativt, så är arbetsintegralen oberoende av väg. (2p)

10. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, definierat för alla $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Visa att $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, men att arbetsintegralen för alla slutna kurvor som går ett varv runt origo är icke-noll. (4p)

(b) Förklara varför $\mathbf{F}$ inte kan vara konservativ. (2p)

Formelblad TMA044 och MVE085, 16/17

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys - Omtenta 2017-12-19	sid.nummer	Poän
------------	---	------------	------

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på separat skrivpapper.

- (a) i. Ange om följande är sant eller falskt.

Påstående: *Komplementet till en sluten boll är en öppen mängd.*

(0.5p)

- ii. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Vilket eller vilka av följande påståenden är sanna? Ni får ringa in *max tre alternativ* (bokstäver); för fler än tre angivna alternativ blir det 0 poäng. Varje rätt svar ger 0.5p.

(1.5p)

- A** Om f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till (a, b) , så är f differentierbar i (a, b) .
B Om f 's partiella derivator existerar i (a, b) , så är f differentierbar i (a, b) .
C Gradienten kan ses som en flervariabel analog till derivatan av en funktion $f(x)$.
D Hessianen kan ses som en flervariabel analog till derivatan av en funktion $f(x)$.
E Om U är en öppen mängd och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U .
F Om U är en sluten mängd och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U .
G Om U är en begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U .

- (b) Låt $f(x, y, z) = \sin(y) + \cos(xy) - yz$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 1 + \pi$ i punkten $(1, \pi/2, -2)$. Bestäm också riktningsderivatan till f i samma punkt i riktningsvektorn $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

(3p)

- (c) Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationerna

$$z = \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2},$$

med $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- i. Bestäm en parametrisering $\mathbf{r}(t)$ av $\mathcal{C}$.

(1p)

- ii. Bestäm längden av $\mathcal{C}$ mellan $t = 0$ och $t = 1$ genom att ställa upp den relevanta kurvintegralen och beräkna den.

(1p)

- (d) Låt $f(x, y, z) = x^2y^3z^2 + z$ och låt $g(t)$ vara en differentierbar funktion. Sätt $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + g(t)\mathbf{k}$ och beräkna $\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))$.

(2p)

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = -2x + 2y + x^2 + y^2$.

- (a) Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till $f(x, y)$.

(2p)

- (b) Hitta max och min till $f(x, y)$ på disken $x^2 + y^2 \leq 1$.

(2p)

- (c) Bestäm Taylorpolynomet till $f(x, y)$ i punkten $(0, 0)$ till andra ordningen i x och y .

(1p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys - Omtenta 2017-12-19	sid.nummer	Poän
------------	--	------------	------

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 3 nedan räcker det med svar (ingen motivering behövs), men för uppgift 4-7 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. (a) Ange om följande är sant eller falskt.

Påstående: Om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är ett vektorfält så är vektorn $\mathbf{F}(x, y)$ parallell med fältlinjen som skär punkten (x, y) .

(0.5p)

- (b) Vilka av följande påståenden stämmer för dubbelintegralen $\iint_D f(x, y) dA$ av en positiv, integrerbar funktion $f(x, y)$ på en domän $D \subset \mathbb{R}^2$? Varje rätt svar ger 0.5p.

(1.5p)

A Integralen är en vektor i $\mathbb{R}^2$.

B Värdet av integralen är ett tal som representerar volymen av soliden under grafen $z = f(x, y)$ och ovanför D .

C Om $f = 1$ beräknar integralen även arean av D .

D Om D är en rektangel i $\mathbb{R}^2$ så spelar det ingen roll vilken ordning vi utför integralen.

E Om D är angiven på x -enkel form så *måste* vi börja att integrera över x .

4. Låt C vara kvartscirkelbågen i $\mathbb{R}^2$ som sammanbinder punkterna $(2, 0)$ och $(1, 1)$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C x^2 dy - 2y dx.$$

(3p)

5. Beräkna volymen under paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och ovanför området $D \subset \mathbb{R}^2$ som begränsas av paraboloiden samt $-x \leq y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0$.

(3p)

Tips: $\arctan \sqrt{3} = \pi/3$.

6. Låt $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$.

- (a) Beräkna arbetet som vektorfältet $\mathbf{F}$ utför längs kurvan C som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3 - t), 0 \leq t \leq 1$.

(3p)

- (b) Använd Greens sats för att räkna ut arean till området R som C omsluter.

(2p)

7. Låt C vara cylindern som bestäms av $x^2 + y^2 \leq a^2$ samt $-3 \leq z \leq 3$.

- (a) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ upp genom toppen och ner genom botten av C .

(3p)

- (b) Använd dina resultat i (a) tillsammans med Gauss sats för att beräkna flödet av $\mathbf{F}(x, y, z)$ ut genom mantelytan av C .

(2p)