

Omtentamen

MVE085 Flervariabelanalys

2016-01-04 kl. 8.30–12.30

Examinator: Dennis Eriksson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anna Persson , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, inklusive bonuspoäng, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive bonusp.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 3-4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-7 se sidor 5-6

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningssång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

8. Beskriv fältlinjerna till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, x)$. (6p)

9. Bevisa nedanstående

(a) Greens sats över en rektangel R i $\mathbb{R}^2$. (4p)

(b) Identiteten $\text{div curl} = 0$. (2p)

10. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, definierat för alla $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Visa att $\text{curl } \mathbf{F} = 0$, men att arbetsintegralen för alla slutna kurvor som går ett varv runt origo är icke-noll. (4p)

(b) Förklara varför $\mathbf{F}$ inte kan vara konservativ. (2p)

Formelblad för TMA044 och MVE085, 15/16

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2016-01-04	sid.nummer	Poäng
------------	--------------------------------------	------------	-------

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på angiven plats.

- (a) i. Ange om följande påstående om en godtycklig funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är sant eller falskt. (0.5p)
- Påstående:** Om gränsvärdet då $(x, y) \rightarrow (a, b)$ existerar, så är $f(x, y) = f(a, b)$.

Svar:

- ii. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion och studera ytan $z = f(x, y)$. Vilket eller vilka av följande påståenden om de partiella derivatorna är sanna? Ni får ringa in *max två alternativ* (bokstäver); för fler än två angivna alternativ blir det 0 poäng. Varje rätt svar ger 0.5p. (1p)
- A** Den partiella derivatan f_1 anger lutningen på tangentlinjen till kurvan som skär ytan $z = f(x, y)$ och planet $y = \text{konst}$.
- B** Den partiella derivatan f_1 anger lutningen på tangentlinjen till kurvan som skär ytan $z = f(x, y)$ och planet $x = \text{konst}$.
- C** Den partiella derivatan f_2 anger lutningen på tangentlinjen till kurvan som skär ytan $z = f(x, y)$ och planet $y = \text{konst}$.
- D** Den partiella derivatan f_2 anger lutningen på tangentlinjen till kurvan som skär ytan $z = f(x, y)$ och planet $x = \text{konst}$.

- (b) Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 5$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)
- Lösning:**

Svar:

- (c) En partikel rör sig längs kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \sin t, 1)$ med $0 \leq t \leq 2\pi$.
- i. Beskriv kurvans geometriska form. (1p)
- ii. Bestäm partikelns fart i punkten $t = \pi$. (1p)
- iii. Skriv ner en integral vars värde ger kurvlängden mellan $t = 0$ och $t = 2\pi$. Du behöver ej beräkna integralen! (1p)

Lösning:

Svar:

- (d) Låt $f(x, y, z) = x^3 y^2 z$ och parametrisera riktningsvektorn med $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + g(t) \mathbf{k}$, där $g(t)$ är en differentierbar funktion av t . Beräkna $\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))$. (2.5p)

Lösning:

Svar:

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper.
Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = 4x - 4y - x^2 - y^2$.

- (a) Hitta och klassificera alla kritiska punkter till $f(x, y)$. (2p)
- (b) Hitta max och min till $f(x, y)$ på disken $x^2 + y^2 \leq 2$. (2p)
- (c) Bestäm Taylorpolynomet till $f(x, y)$ i punkten $(0, 0)$ till andra ordningen i $h = x - 0$ och $k = y - 0$, dvs behåll termer upp till h^2, k^2 och hk . (2p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2016-01-04	sid.nummer	Poäng
------------	--------------------------------------	------------	-------

Godkäntdelen: del 2

Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper eller angiven plats.

3. (a) Ange om följande är sant eller falskt.

Påstående: Om $\mathbf{F}$ är ett vektorfält, så är fältlinjerna ortogonala till $\mathbf{F}$.

(0,5p)

Svar:

- (b) Vilka av följande påståenden stämmer? Varje rätt svar ger 0.5p. Du får max ange 2 alternativ; vid fler än 2 angivna alternativ blir det 0p. *Det räcker att ange svar; ingen motivering behövs här.*

(1p)

A Den generaliserade integralen av $e^{-x^2-y^2}$ över $\mathbb{R}^2$ konvergerar.

B Om f är kontinuerlig över en sluten mängd så är f integrerbar på samma mängd.

C $\phi(x, y, z) = yz + xz + xy$ är en potential till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$.

D $\phi(x, y, z) = xyz$ är en potential till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$.

E Potentialerna ϕ och $\phi + c$, där c är en godtycklig funktion, motsvarar samma vektorfält.

4. Låt T vara randen, moturs orienterad, till triangeln vars hörn ligger i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$. Räkna ut arbetsintegralen $\int_T \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, -x^2)$ genom

(a) att parametrisera T och direkt räkna ut integralen.

(3p)

(b) att använda Greens sats.

(2p)

5. Låt S vara den del av ytan $z = 9 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy -planet.

(a) Räkna ut arean till S

(2,5p)

(b) Räkna ut flödet upp genom S , för vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{yz}, x, e^{-x^2-y^2})$, genom att tillämpa Gauss divergenssats på lämpligt sätt.

(3p)

6. Betrakta det konservativa vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz - 6x \sin(y), x^2z - 3x^2 \cos(y), x^2y + e^z).$$

(a) Hitta en potential till $\mathbf{F}$.

(2p)

(b) Räkna ut arbetet som $\mathbf{F}$ utför mellan punkten $(0, 0, 0)$ och $(1, 1, 1)$, längs kurvan $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

(1p)

Lösning:

Svar:

7. Hitta masscentrum (x_T, y_T, z_T) för området R som ligger under ytan $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och ovanför xy -planet, för den konstanta densiteten $\rho(x, y, z) = 1$. Se formelbladet för definitionen av masscentrum.

(3p)

Lösning:

Svar: