

Omtentamen

MVE085 Flervariabelanalys

2016-08-26 kl. 8.30–12.30

Examinator: Dennis Eriksson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Adam Malik, telefon: anknytning 5325

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 3

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-7 se sidan 4

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningssång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

8. Bestäm medelavståndet från en punkt i bollen B av radie R till dess rand. (6p)

9. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till skärningskurvan mellan ytorna $2x^2 + y^3 + z^2 = 2$ och $xy^2 + z = 1$ i punkten $(0, 1, 1)$. (6p)

10. Bevisa nedanstående:

(a) Gauss divergenssats för enhetskuben i $\mathbb{R}^3$. (4p)

(b) Identiteten $\text{curl grad} = 0$. (2p)

Formelblad för TMA044 och MVE085, 15/16

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2016-08-26	sid.nummer	Poäng
------------	---	------------	-------

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på separat skrivpapper.

- (a) i. Ange om följande påstående är sant eller falskt. (0.5p)

Påstående: Ekvationen $f(x, y, z) = 0$ beskriver en tvådimensionell yta i ett tre-dimensionellt rum.

- ii. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Vilket eller vilka av följande påståenden är sanna? Ni får ringa in *max två alternativ* (bokstäver); för fler än ett angivet alternativ blir det 0 poäng. Varje rätt svar ger 0.5p. (1p)

A Om vi vet att båda partiella derivatorna f_1 och f_2 existerar i (x, y) så vet vi att f är kontinuerlig i (x, y) .

B Om vi vet att båda partiella derivatorna f_1 och f_2 existerar i (x, y) så vet vi att f är differentierbar i (x, y) .

C Om vi vet att f är kontinuerlig i (x, y) så vet vi att f är differentierbar i (x, y) .

D Om vi vet att båda partiella derivatorna f_1 och f_2 existerar och är kontinuerliga i (x, y) då vet vi att f är differentierbar i (x, y) .

E Om vi vet att f är differentierbar i (x, y) så vet vi att f är kontinuerlig i (x, y) .

- (b) Bestäm och skissa definitionsmängden till funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$. (2p)

- (c) Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $x^3 + y + 2z^2 = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)

- (d) En partikel rör sig längs kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (\sin t, 1, \cos t)$ med $0 \leq t \leq 2\pi$.

i. Beskriv kurvans geometriska form. (1p)

ii. Bestäm partikelns fart i punkten $t = \pi$. (1p)

iii. Beräkna kurvlängden mellan $t = 0$ och $t = 2\pi$. (1p)

- (e) Uttryck $\frac{d^2}{dx^2} f(x, x^2)$ i de partiella derivatorna av f . (2.5p)

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = 4y + x^2 - 4xy + y^3$.

- (a) Hitta och klassificera alla kritiska punkter till $f(x, y)$. (2p)

- (b) Bestäm Taylorpolynomet till $f(x, y)$ i punkten $(4, 2)$ till andra ordningen i $h = x - 4$ och $k = y - 2$, dvs behåll termer upp till h^2, k^2 och hk . (2p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2016-08-26	sid.nummer	Poäng
------------	--------------------------------------	------------	-------

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 3-4 nedan räcker det med kortare lösningsskiss men för uppgift 5-7 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. (a) Ange om följande är sant eller falskt.

Påstående: Om f är en kontinuerlig funktion på ett begränsat område D så är f integrerbar på D .

(0.5p)

- (b) Vilka av följande påståenden stämmer? Varje rätt svar ger 0.5p. Du får max ange 2 alternativ; vid fler än 2 angivna alternativ blir det 0p. Det räcker att ange svar; ingen motivering behövs här.

(1p)

A En trippelintegral $\iiint_R dV$ tolkas som en volymen av området R .

B En trippelintegral $\iiint_R dV$ tolkas som en area av området R .

C Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ vara ett konservativt vektorfält i två dimensioner. Då är $\partial F_1 / \partial y = \partial F_2 / \partial x$.

D Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ vara ett vektorfält i två dimensioner. Om $\partial F_1 / \partial x = \partial F_2 / \partial y$ är $\mathbf{F}$ konservativt.

E Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ vara ett vektorfält i två dimensioner. Om $\partial F_1 / \partial y = \partial F_2 / \partial x$ är $\mathbf{F}$ konservativt.

4. Låt T vara kurvan beskriven av $\ell(t) = (\cos t, \sin t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Räkna ut arbetsintegralen $\int_T \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x, y) = (-1, y^2)$ genom

- (a) att parametrisera T och direkt räkna ut integralen.

(2p)

- (b) att använda på lämpligt sätt komplettera T till ett slutet område och använda Greens sats.

(3p)

5. Låt S vara den del av ytan $z = x^2 - y^2$ där $x^2 + y^2 \leq 1$.

- (a) Räkna ut arean till S .

(2p)

- (b) Räkna ut flödet upp genom S , för vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (-x, y, 0)$.

(3p)

6. Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-ay}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

för en konstant a .

- (a) Bestäm konstanten a så att $\mathbf{F}$ blir virvelfritt.

(2p)

- (b) Räkna ut arbetet som $\mathbf{F}$ utför längs enhetscirkeln C , orienterad moturs.

(2p)

7. Skissera integrationsområdet för

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3) dx dy$$

och räkna ut integralen.

(3.5p)