

Omtentamen

MVE085 Flervariabelanalys

2016-08-26 kl. 8.30–12.30

Examinator: Dennis Eriksson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Adam Malik, telefon: anknytning 5325

Hjälpmedel: endast bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidan 3

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-7 se sidan 4

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

8. Bestäm medelavståndet från en punkt i bollen B av radie R till dess rand. (6p)

Lösning: Vi kan anta att bollen är centrerad i origo. Avståndet från en punkt P till randen ges av $R - \|P\| = R - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Medelavståndet ges i sin tur av medelvärdet

$$\frac{1}{\text{Vol}(B)} \iiint_B (R - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dV.$$

Det är välkänt att en sådan boll har volym $4\pi R^3/3$, så vi behöver bara räkna ut trippelintegralen. $\iiint_B (R - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dV = \iiint_B R dV - \iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV = 4\pi R^4/3 - \iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$. För denna sista integralen använder vi sfäriska koordinater, $x = \rho \cos \theta \sin \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \varphi$, $dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$. Vi får, eftersom $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^3 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta = \pi R^4/4.$$

När vi sätter ihop denna information får vi att medelvärdet ges av

$$\frac{4\pi R^4/3 - \pi R^4/4}{4\pi R^3/3} = R/4.$$

9. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till skärningskurvan mellan ytorna $2x^2 + y^3 + z^2 = 2$ och $xy^2 + z = 1$ i punkten $(0, 1, 1)$. (6p)

Lösning: Ytorna kan ses som nivåytor till funktionerna

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^3 + z^2, \quad g(x, y, z) = xy^2 + z. \quad (1)$$

Gradienten av funktionen i en punkt är alltid vinkelrät mot nivåytan. Vi beräknar först gradienterna av våra två funktioner:

$$\nabla f(x, y, z) = (4x, 3y^2, 2z), \quad \nabla g(x, y, z) = (y^2, 2xy, 1). \quad (2)$$

I punkten $(0, 1, 1)$ får vi då följande två normalvektorer till nivåytorna:

$$\nabla f(0, 1, 1) = (0, 3, 2), \quad \nabla g(0, 1, 1) = (1, 0, 1). \quad (3)$$

Eftersom dessa vektorer är vinkelräta mot resp. nivåyta kommer deras kryssprodukt ge en riktningsvektor för tangentlinjen i $(0, 1, 1)$. Vi beräknar:

$$\nabla f(0, 1, 1) \times \nabla g(0, 1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - (-2)\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = (3, 2, -3). \quad (4)$$

Den sökta tangentlinjen kan därför parametriseras enligt

$$\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

10. Bevisa nedanstående:

(a) Gauss divergenssats för enhetskuben i $\mathbb{R}^3$. (4p)

(b) Identiteten $\text{rot grad} = 0$. (2p)

Formelblad för TMA044 och MVE085, 15/16

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2016-08-26	sid.nummer	Poäng
------------	--------------------------------------	------------	-------

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på separat skrivpapper.

- (a) i. Ange om följande påstående är sant eller falskt. (0.5p)

Påstående: Ekvationen $f(x, y, z) = 0$ beskriver en tvådimensionell yta i ett tre-dimensionellt rum.

Svar: Sant

- ii. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Vilket eller vilka av följande påståenden är sanna? Ni får ringa in *max två alternativ* (bokstäver); för fler än ett angivet alternativ blir det 0 poäng. Varje rätt svar ger 0.5p. (1p)

A Om vi vet att båda partiella derivatorna f_1 och f_2 existerar i (x, y) så vet vi att f är kontinuerlig i (x, y) .

B Om vi vet att båda partiella derivatorna f_1 och f_2 existerar i (x, y) så vet vi att f är differentierbar i (x, y) .

C Om vi vet att f är kontinuerlig i (x, y) så vet vi att f är differentierbar i (x, y) .

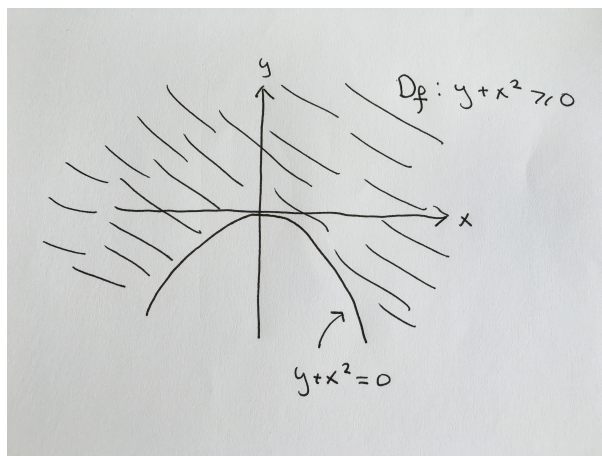
D Om vi vet att båda partiella derivatorna f_1 och f_2 existerar och är kontinuerliga i (x, y) då vet vi att f är differentierbar i (x, y) .

E Om vi vet att f är differentierbar i (x, y) så vet vi att f är kontinuerlig i (x, y) .

Svar: Rätt svar är **D och E**

- (b) Bestäm och skissa definitionsmängden till funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$. (2p)

Lösning: Definitionsmängden är $D_f = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y \geq 0\}$. Se bild nedan:



- (c) Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $x^3 + y + 2z^2 = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)

Lösning: Ytan kan ses som nivåyta till funktionen $f(x, y, z) = x^3 + y + 2z^2$. Tangentplanet till en nivåyta i punkten (a, b, c) ges av ekvationen:

$$\nabla f(a, b, c) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0. \quad (6)$$

I vårt fall har vi:

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2, 1, 4z), \quad \nabla f(1, 1, 1) = (3, 1, 4), \quad (7)$$

vilket ger

$$3(x - 1) + (y - 1) + 4(z - 1) = 0. \quad (8)$$

Ekvationen som beskriver tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$ ges då av

$$3x + y + 4z = 8. \quad (9)$$

- (d) En partikel rör sig längs kurvan som parametreras av $\mathbf{r}(t) = (\sin t, 1, \cos t)$ med $0 \leq t \leq 2\pi$.

- i. Beskriv kurvans geometriska form. (1p)
- ii. Bestäm partikelns fart i punkten $t = \pi$. (1p)
- iii. Beräkna kurvlängden mellan $t = 0$ och $t = 2\pi$. (1p)

Lösning (i): Kurvan parametreras av $x = \sin t, y = 1, z = \cos t$. Således är kurvan en cirkel i planet $y = 1$.

Lösning (ii): Vi deriverar positionsvektorn med avseende på parametern t för att få hastigheten längs kurvan:

$$\mathbf{r}'(t) = (\cos t, 0, -\sin t). \quad (10)$$

Farten ges av absolutbeloppet av hastigheten:

$$v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{1} = 1. \quad (11)$$

Farten är således konstant och alltså oberoende av positionen längs kurvan.

Lösning (iii): I allmänhet ges kurvlängden mellan ett intervall $a \leq t \leq b$ av formeln:

$$\ell = \int_a^b v(t) dt. \quad (12)$$

Vi vill ha längden på kurvan mellan $t = 0$ och $t = 2\pi$ vilker ger

$$\ell = \int_0^{2\pi} v(t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi - 0 = 2\pi. \quad (13)$$

- (e) Uttryck $\frac{d^2}{dx^2} f(x, x^2)$ i de partiella derivatorna av f . (2.5p)

Lösning: Vi beräknar:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f(x, x^2) &= \frac{d}{dx} \left(f_1(x, x^2) + 2x f_2(x, x^2) \right) \\ &= f_{11}(x, x^2) + 2x f_{12}(x, x^2) + 2f_2(x, x^2) + 2x f_{21}(x, x^2) + (2x)^2 f_{22}(x, x^2) \\ &= f_{11}(x, x^2) + 4x f_{12}(x, x^2) + 2f_2(x, x^2) + 4x^2 f_{22}(x, x^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper.
Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = 4y + x^2 - 4xy + y^3$.

(a) Hitta och klassificera alla kritiska punkter till $f(x, y)$. (2p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet till $f(x, y)$ i punkten $(4, 2)$ till andra ordningen i $h = x - 4$ och $k = y - 2$, dvs behåll termer upp till h^2, k^2 och hk . (2p)

Lösning (a): Kritiska punkter bestäms av $\nabla f(x, y) = 0$, dvs av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 0, \\ 4 - 4x + 3y^2 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Den första ekvationen ger $x = 2y$ vilket vi kan stoppa in i den andra ekvationen för att få följande andragradsekvation för y :

$$3y^2 - 8y + 4 = 0 \quad (16)$$

med lösningar

$$y = \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}. \quad (17)$$

Det finns således två kritiska punkter givna av:

$$(4, 2), \quad (4/3, 2/3). \quad (18)$$

För att klassificera dessa beräknar vi Hessianen:

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y \end{pmatrix} \quad (19)$$

I den första kritiska punkten finner vi:

$$\det H(f)(4, 2) = 24 - 16 = 8 > 0. \quad (20)$$

Samtidigt har vi att $f_{11} > 0$ vilket innebär att $(4, 2)$ är ett lokalt minimum.

För den andra kritiska punkten har istället

$$\det H(f)(4/3, 2/3) = 8 - 16 = -8 < 0, \quad (21)$$

vilket innebär att detta är en sadelpunkt.

Slutsats: Det finns två kritiska punkter: $(4, 2)$ är ett lokalt minimum samt $(4/3, 2/3)$ som är en sadelpunkt.

Lösning (b): Den allmänna formeln för andra ordningens Taylorutveckling av en funktion $f(x, y)$ i punkten (a, b) uttrycks enklast i variablerna $h = x - a$ samt $k = y - b$ och ges av

$$f(h, k) = f(a, b) + hf_1(a, b) + kf_2(a, b) + \frac{1}{2} \left(h^2 f_{11}(a, b) + 2hk f_{12}(a, b) + k^2 f_{22}(a, b) \right) + \dots \quad (22)$$

Vi vill utveckla funktionen $f(x, y) = 4y + x^2 - 4xy + y^3$ i den kritiska punkten $(4, 2)$. Vi

har således

$$f(4, 2) = f_1(4, 2) = f_2(4, 2) = 0, \quad (23)$$

samt

$$f_{11}(4, 2) = 2, \quad f_{12}(4, 2) = -4, \quad f_{22}(4, 2) = 12. \quad (24)$$

Insättning i den allmänna formeln ger Taylorutvecklingen

$$\begin{aligned} f(h, k) &= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \left(h^2 \cdot 2 - 2hk \cdot 4 + k^2 \cdot 12 \right) \\ &= h^2 - 4hk + 6k^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2016-08-26	sid.nummer	Poäng
------------	--------------------------------------	------------	-------

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 5-6 nedan räcker det med kortare lösningsskiss men för uppgift 7-8 skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan. Alla lösningar anges på separat skrivpapper.

3. (a) Ange om följande är sant eller falskt.

Påstående: Om f är en kontinuerlig funktion på ett begränsat område D så är f integrerbar på D .

(0.5p)

Svar: Falskt (om området inte är slutet kan integralen bli för stor).

- (b) Vilka av följande påståenden stämmer? Varje rätt svar ger 0.5p. Du får max ange 2 alternativ; vid fler än 2 angivna alternativ blir det 0p. Det räcker att ange svar; ingen motivering behövs här.

(1p)

A En trippelintegral $\iiint_R dV$ tolkas som en volymen av området R .

B En trippelintegral $\iiint_R dV$ tolkas som en area av området R .

C Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ vara ett konservativt vektorvält i två dimensioner. Då är $\partial F_1 / \partial y = \partial F_2 / \partial x$.

D Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ vara ett vektorvält i två dimensioner. Om $\partial F_1 / \partial x = \partial F_2 / \partial y$ är F konservativt.

E Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ vara ett vektorvält i två dimensioner. Om $\partial F_1 / \partial y = \partial F_2 / \partial x$ är F konservativt.

Svar: A och C stämmer.

4. Låt T vara kurvan beskriven av $\ell(t) = (\cos t, \sin t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Räkna ut arbetsintegralen $\int_T \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x, y) = (-1, y^2)$ genom

- (a) att parametrisera T och direkt räkna ut integralen.

(2p)

- (b) att använda på lämpligt sätt komplettera T till ett slutet område och använda Greens sats.

(3p)

Lösning:(a) Randen är redan parametriserad, med $x = \cos t$, $y = \sin t$, så $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$. Vår arbetsintegral blir alltså

$$\int_T \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin t + \sin^2 t \cos t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt = \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2/3.$$

Lösning:(b) Vi sluter till området genom att lägga till linjen $\ell_1(t) = (0, 1-t)$, där t går från 0 till 2. Enligt Greens sats, om R är det inre för det nya området T' och $\mathbf{F}$ ett godtyckligt vektorfält, så är $\int_T \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R [\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}] dx dy$. I detta fallet erhåller vi

$$\int_T \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{\ell_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{T'} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0.$$

Med andra ord så är

$$\int_T \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = - \int_{\ell_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

Området R kan parametreras med polära koordinater, via $x = r \cos t, y = r \sin t, dx dy = r dr dt$ där $0 \leq r \leq 1, -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Vi får alltså att dubbelintegralen ovan blir

$$\iint_R 2x dx dy = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r^2 \cos t dt dr = 2 * 1/3 * 2 = 2.$$

Arbetsintegralen över linjen $\ell_1(t)$ har $dx = 0, dy = -dt$ och alltså är

$$\int_{\ell_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^2 (-1 * 0 + (1-t)^2 * -1) dt = 2/3,$$

vilket överensstämmer med första uppgiften.

5. Låt S vara den del av ytan $z = x^2 - y^2$ där $x^2 + y^2 \leq 1$.

(a) Räkna ut arean till S . (2p)

(b) Räkna ut flödet upp genom S , för vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (-x, y, \sin z)$. (3p)

Lösning:(a) Eftersom det är en funktionsyta ges ytarea-elementet av $dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy = \sqrt{(2x)^2 + (-2y)^2 + 1} dx dy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy$. Vidare så är området S sådan att $x^2 + y^2 \leq 1$, vilket lättast parametreras med polära koordinater: $x = r \cos t, y = r \sin t, dx dy = r dr dt$ och $0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi$. Alltså ska vi räkna ut integralen

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} r dr dt = 2\pi \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} r dr.$$

Detta görs också lättast med variabel-substitutionen $u = 4r^2 + 1$, så att $du/8 = r dr$ och

$$\int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} r dr = \frac{1}{8} \int_1^5 \sqrt{u} du = \frac{1}{12} \left[u^{3/2} \right]_1^5 = \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1).$$

Arean ges alltså av $\frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1)$.

Lösning:(b) Eftersom det inte finns något lock, och funktionen redan verkar relativt simpel om man bortser från sin z , verkar det enklast att sätta upp flödesintegralen $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS$ direkt. Eftersom det är en funktionsyta parametrerad av x och y har vi $\mathbf{N} dS = (-f_x, -f_y, 1) dx dy = (-2x, 2y, 1) dx dy$. Då är $\mathbf{F} \bullet \mathbf{N} = 2(x^2 + y^2) + \sin(x^2 - y^2)$. Av symmetriskäl försvinner integralen över $\sin(x^2 - y^2)$. Med samma polära koordinater som förrut får vi då

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^3 dr dt = \pi.$$

6. Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-ay}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

för en konstant a .

(a) Bestäm konstanten a så att $\mathbf{F}$ blir virvelfritt. (2p)

(b) Räkna ut arbetet som $\mathbf{F}$ utför längs enhetscirkeln C , orienterad moturs. (2p)

Lösning:(a) Att $\mathbf{F}$ är sluten innebär att $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$. Vi har $\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{-ay}{x^2 + y^2} = \frac{a(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. För att det ska gälla måste $a = 1$.

Lösning:(b) Enhetscirkeln är parametrerad av $x = \cos t, y = \sin t, dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt$. Eftersom $x^2 + y^2 = 1$ blir vår arbetsintegral $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \cos^2 t + \sin^2 t dt = 2\pi$.

7. Skissera integrationsområdet för

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3) dx dy$$

och räkna ut integralen.

(3.5p)

Lösning: Bild utgår. Men området kan beskrivas som $0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1$. Detta kan alternativt beskrivas som $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$, så integralen ges alternativt av

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \sin(x^3) dy dx.$$

Denna integral verkar mer överkomlig, och vi får direkt, via variabelsubstitutionen $u = x^3, du = 3x^2 dx$ att den är lika med $\int_0^1 x^2 \sin(x^3) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \sin u du = \frac{1 - \cos 1}{3}$.