

Tentamen

MVE085 Flervariabelanalys

2015-10-29 kl. 8.30–12.30

Examinator: Dennis Eriksson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Mattias Lennartsson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

Tentamen på kursen består av tre delar; del 1 och del 2 av godkäntdelen samt överbetygsdelen. Denna deltentamen täcker endast den första av dessa tre delar. För godkänt på tentamen som helhet krävs normalt att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Alternativt kan man klara tentan genom att få 25 poäng totalt på del 1, del 2 och med bonuspoäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen. För godkänt på kursen skall också Matlab-momentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas i samband med undervisningen senast tre veckor efter tentamenstillfället. Första gransknings-tillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 11-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-8

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

9. Låt $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett överallt definierat vektorfält.

(a) Låt $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ vara två kurvor som börjar i en punkt P_1 och slutar i en punkt P_2 . Använd Greens sats för att beräkna skillnaden $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ i termer av dubbelintegraler. (4p)

(b) Använd ovanstående observation och lämpliga identiteter för att bevisa att om $\mathbb{F}$ är konservativt, så är arbetsintegralen oberoende av väg. (2p)

10. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion.

(a) Formulera definitionen av *differentierbarhet* för $f(x, y)$ i en punkt (a, b) . (2p)

(b) Visa att om $f(x, y)$ är differentierbar i (a, b) så är $f(x, y)$ kontinuerlig i (a, b) . (2p)

(c) Betrakta vektorfältet ∇f som ett vektorfält $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ genom att sätta z -komponenten till noll. Visa att $\mathbf{curl} \nabla f = \nabla \times (\nabla f) = 0$. (2p)

11. Låt K vara en kon i $\mathbb{R}^3$. Basen till konen är ett område A i $z = 0$ och $P \in \mathbb{R}^3$ är spetsen till konen, så K ges av alla punkter på alla linjer som dras mellan P och A . Bevisa med hjälp av lämpliga verktyg från kursen att volymen till K är $\text{Area}(A) \cdot \text{Höjden} / 3$. TIPS: Det kan vara värt att börja med ett specialfall (ger 2 poäng). (6p)

Formelblad för TMA044 och MVE085, 15/16

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2015-10-29	sid.nummer	Poäng
------------	---	------------	-------

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på angiven plats.

- (a) Ange om följande påstående om en godtycklig funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är sant eller falskt.

(0.5p)

Påstående: *De inre punkterna (interiören) av en sluten boll är sluten*

- (b) Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Vilket eller vilka av följande påståenden är sanna? Ni får ringa in *max tre alternativ* (bokstäver); för fler än tre angivna alternativ blir det 0 poäng. Varje rätt svar ger 0.5p.

(1.5p)

- A** Om f har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning till (a, b) , så är f differentierbar i (a, b) .
- B** Om f 's partiella derivator existerar i (a, b) , så är f differentierbar i (a, b) .
- C** Gradienten kan ses som en flervariabel analog till derivatan av en funktion $f(x)$.
- D** Hessianen kan ses som en flervariabel analog till derivatan av en funktion $f(x)$.
- E** Om U är en öppen mängd och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U .
- F** Om U är en sluten mängd och begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U .
- G** Om U är en begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$, så existerar nödvändigtvis globalt max i U .

- (c) Låt $f(x, y, z) = \sin(xy) + \cos(y) - xz$. Bestäm tangentplanet till ytan $f(x, y, z) = 0$ i punkten $(0, \pi/2, 1)$ och bestäm riktningsderivatan $D_u f$ till f i samma punkt och riktningen $u = (1, 0, 0)$.

(3p)

Lösning:

Svar:

(d) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sin(h+k)/\ln(1+h+k).$$

TIPS: Gör en första ordningens Taylor-utveckling av $\sin(h+k)$ och $\ln(1+h+k)$. (4p)

Lösning:

Svar:

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper.
Motivera och förklara så väl du kan.

2. Använd Lagranges metod för att bestämma minsta avståndet från kurvan

$$g(x, y) = x^4 - y^4 = 0 \text{ till punkten } (0, 2).$$

TIPS: Funktionen $\sqrt{x^2 + y^2}$ är minimal på ett område exakt när $f(x, y) = x^2 + y^2$ är minimal.

(5p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2015-10-29	sid.nummer	Poäng
------------	--------------------------------------	------------	-------

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 3-6 nedan räcker det med kortare lösningsskiss direkt på tentan men för uppgift 7-8 skall fullständiga lösningar redovisas på separat skrivpapper.

3. (a) Låt D vara ett område i $\mathbb{R}^3$. Vilka påståenden nedan är sanna om de sfäriska koordinaterna (R, θ, ϕ) ? Varje rätt svar ger 0.5p. Du får max ange 2 alternativ; vid fler än 2 angivna alternativ blir det 0p. *Det räcker att ange svar; ingen motivering behövs här.* (1p)
- A $dV = R^2 dR d\theta d\phi$
 - B $dV = R^2 \sin \phi dR d\theta d\phi$
 - C $0 \leq \theta \leq \pi$
 - D $0 \leq \phi \leq \pi$
 - E $-\infty < R < \infty$
4. Låt $\mathbb{F}$ vara en konservativ kraft med potential ϕ definierad på en öppen sammanhängande domän D i xy -planet. Vilka av följande påståenden stämmer för $\mathbb{F}$? Varje rätt svar ger 0.5p. Du får max ange 2 alternativ; vid fler än 2 angivna alternativ blir det 0p. *Det räcker att ange svar; ingen motivering behövs här.* (1p)
- (a) A Eftersom $\mathbb{F}$ är konservativ så måste linjeintegralen över alla kurvor i D som sammanbinder två godtyckliga punkter i D att försvinna.
 - B Arbetet som $\mathbb{F}$ uträttar längs en sluten kurva i D är noll.
 - C Ekvipotentialkurvorna till $\mathbb{F}$ är alla vinkelräta mot fältlinjerna.
 - D Vektorn $\nabla \phi(x, y)$ är vinkelrät mot vektorn $\mathbb{F}(x, y)$ i punkten (x, y) .
 - E Potentialerna ϕ och $\phi + c$, där c är en godtycklig funktion, motsvarar samma vektorfält.
5. (a) Rita upp integrationsregionen i integralen $I = \int_0^1 \int_x^{2x} dy dx$, och ändra integrationsordningen så att I skrivs som en integral över $dx dy$ istället. (2p)
- TIPS: När du byter ordning kommer I skrivas som summan av två separata integraler.

Lösning:

6. (a) Visa att $\mathbb{F}(x, y) = (3x^2 - 6y^2)\mathbf{i} + (-12xy + 4y)\mathbf{j}$ är konservativ och ta fram en potential $\phi(x, y)$. (2p)

(b) Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan i $\mathbb{R}^2$ som ges av $x = 1 + y^3(1 - y)^3$ där $0 \leq y \leq 1$. Bestäm arbetet som $\mathbb{F}(x, y)$ utövar längs $\mathcal{C}$. (1p)

Lösning:

Svar:

7. (a) Använd Greens formel för att visa att interiören till ellipsen

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

har area πab . (3p)

8. Låt S vara den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som ligger utanför cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och låt $\mathbb{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vara ett vektorfält.

(a) Beräkna flödet ut genom S av vektorfältet $\mathbb{F}(x, y, z)$. Du kan använda enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{2}(x, y, z)$ och det är rekommenderat att använda sfäriska koordinater; gränserna för ϕ blir: $\pi/6 \leq \phi \leq 5\pi/6$. Notera att $\cos 5\pi/6 = -\sqrt{3}/2$ och $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$. (4p)

(b) Visa att flödet av $\mathbb{F}(x, y, z)$ genom mantelytan av cylindern $x^2 + y^2 = 1$ är noll. (2p)

(c) Använd Gauss sats för $\mathbb{F}(x, y, z)$ för att beräkna volymen av regionen som ligger mellan S och cylindern $x^2 + y^2 = 1$. (2p)