Kompletterande uppgift, 14. Beräkna arean av den del av ytan $z = xy$ där

$$x^2 + y^2 \leq 8, x \geq 0, y \geq 0.$$

Lösning: Ytan är en funktionsyta, $z = f(x, y) = xy$, så vi får area-elementet

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}dxdy = \sqrt{y^2 + x^2 + 1}dxdy.$$

Vi kallar området vi vill integrera över R, då är integralen på formen

$$\iint_R dS = \iint_R \sqrt{y^2 + x^2 + 1}dxdy.$$

Vi går över i polära koordinater, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, så att $dxdy = rdrd\theta$. I dessa koordinater så är $0 \leq r \leq \sqrt{8}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Om vi skriver om så får vi integralen

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{r^2 + 1}rdrd\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{r^2 + 1}rdr.$$

Nu är det bara en "vanlig"integral att räkna ut. Vi sätter $u = r^2 + 1$ och skriver om så vi får

$$\int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{r^2 + 1}rdr = \frac{1}{2} \int_1^9 \sqrt{u}du = \frac{1}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^9 = \frac{27 - 1}{3} = \frac{26}{3}.$$

Slutligen får vi alltså

$$\int \int_R dS = \frac{\pi}{2}\frac{26}{3} = \frac{13\pi}{3}.$$

Kompletterande uppgift, 15. Beräkna $\iint_R y^2 z dS$ då R är ytan som ges av parametriseringen

$$r(u, v) = (u^2, v, u), 0 \leq u, v \leq 1.$$

Lösning: Ytan är en funktionsyta, men inte av formen $z = f(x, y)$, utan snarare $x = f(y, z) = z^2$, eller i termer av parametrarna u, v, $x = f(v, u) = u^2$. På samma sätt som ovan får vi då $dS = \sqrt{f_y^2 + f_z^2 + 1}dydz = \sqrt{4u^2 + 1}dudv$. Alltså blir integralen

$$\int_0^1 \int_0^1 v^2 u\sqrt{4u^2 + 1}dudv = \int_0^1 v^2 dv \int_0^1 u\sqrt{4u^2 + 1}du = \ldots = \frac{1}{3}\frac{5^{3/2} - 1}{12} = \frac{5^{3/2} - 1}{36}.$$