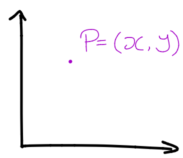
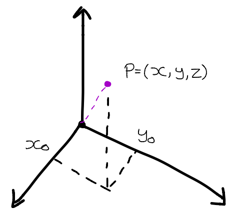
Dagens Meny: 10.1 Analytisk geometri i rymden
10.5 Kvadratiska ytor

10.1

En vektor i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas på formen $P=(x,y)$
En vektor i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas på formen $P=(x,y,z)$

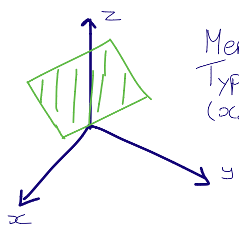
Dessa är exempel på kartesiska koordinater.



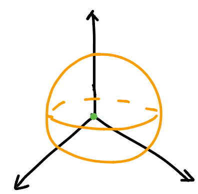


Avstånd mellan punkterna $P=(x_0,y_0,z_0)$ och $Q=(x_1,y_1,z_1)$ ges av $\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$

Ex
$Ax+By+Cz=D$ är ett plan i rymden. (Linalg)



Mer allmänt kan man betrakta objekt givna av ekvationer: $f(x,y,z)=0$
Typiskt exempel som inte är ett plan är en sfär med radie r och centrum (x_0,y_0,z_0): $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$



Mer patologiskt exempel: $x^2+y^2+z^2=0 \rightsquigarrow (0,0,0)$

Ex
Kan vara flera ekvationer. $\underbrace{x^2+y^2+z^2=1}_{\text{enhets sfär}}$ $\underbrace{z=\frac{1}{2}}_{\text{Plan}}$

Ex
Kan också ha objekt av olikheter. $0\leq y+x+z\leq 1$
Betrakta extremvärdena för att få en känsla för objektet.

Ex
$x^2+y^2+z^2=1$ (sfär)
$x+y=1$ (Plan)
Den cirkel i planet $x+y=1$ med centrum i punkten $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ med radie $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

10.5 Kvadratiska Ytor

Def: En kvadratisk yta är ett geometriskt objekt beskrivet av en kvadratisk ekv.
$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$$

Kvadratiska ytor kommer "ersätta" x^2 i taylorutvecklingar. Om $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ finns Taylorutv
$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+\ldots$
Andraderivatan kontrollerar om x_0 är lokalt max/min. | flera variabler ersätts termen $f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}$ med en kvadratisk term som har formen av en kvadratisk yta.

Ex
$Y=(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ (typ en parabolisk cylinder, saknas lite som kommer på nästa föreläsning...)

10.1

Def Topologiska objekt

En mängd $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

{boll av punkter med avstånd $<r$ till P}

* En omgivning av en punkt $P \in \mathbb{R}^n$, är en mängd $S \in \mathbb{R}^n$ som är på formen $B_r(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n \mid |P-Q| < r\}$

Ex: $n=1$ öppet intervall $\rightarrow (0,1) = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 1\}$
$n=2$ öppen disk
$n=3$ öppen sfär

* S är öppen om varje punkt, $P \in S$, har en omgivning som ligger i S.

Ex: • En omgivning är öppen.
• Objekt som är givna av strikta olikheter är öppna.
Viktigt för kontinuitet.

* Komplementet till S, S^c, är alla punkter, $P \in \mathbb{R}^n$, som inte ligger i S.
* S är sluten om S^c är öppet.
Viktigt i optimeringsproblem.

Ex: Objekt som beskrivs av icke-strikta olikheter, $a \leq f \leq b$

* S är begränsad om $S \subseteq B_r(0)$ för något r.

Ex: $y = 3x + 4$ är obegränsad
$x^2 + y^2 = 1$ är begränsad

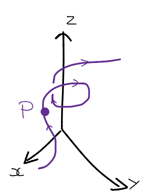
* $P \in \mathbb{R}^n$ är en randpunkt till S om varje omgivning till P innehåller både punkter från S och S^c.

Ex: $x^2 + y^2 \leq 1$ har randpunkter i form av cirkeln som innesluter disken.
$x^2 + y^2 < 1$ ———— " ————

* $P \in \mathbb{R}^n$ är en inre/yttre punkt om P har en omgivning som ligger i S/S^c.

11.1 Vektorfunktioner i en variabel

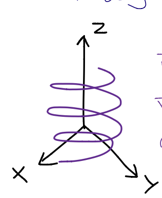
Om vi vill modellera en partikel som rör sig i rummet/planet använder vi en tidsvariabel (t). Vid tidpunkt t befinner sig partikeln sig i $\vec{r}(t) = x(t), y(t), z(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$.



Positionen ges av $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$
Hastigheten ges av $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)$
Farten ges av $|\vec{v}|$
Accelerationen ges av $\frac{d\vec{r}^2}{d^2t} = \vec{a}(t)$

Ex: $\vec{r}(t) = (t, 0, 0)$ och $\vec{r}(t) = (t^3, 0, 0)$ beskriver båda en partikel som rör sig längs x-axeln i $\mathbb{R}^3$. Trots detta är detta två olika partiklar ty hastigheten skiljer dem.

Ex: Räkna ut hastighet och accelerationen för $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.



$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$
$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$
$a(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$

Notera att $|a(t)| = \sqrt{-\cos^2 t + (-\sin^2 t) + 0} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$ Den rör sig alltså med konstant abs.belopp på accelerationen trots att farten $|\vec{v}(t)| = \sqrt{2}$ är konstant.

Minirepitition

$\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$
$\quad \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

Skalärprodukt: $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \in \mathbb{R}$

Vektorprodukt: $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

Norm: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$

Sats

Låt u och v vara deriverbara funktioner $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$. Då gäller:
Om det även gäller att $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är deriverbar:

a) $\frac{d}{dt}(u+v) = u'+v'$

b) $\frac{d}{dt}(\lambda u) = \lambda' u + \lambda u'$

c) $\frac{d}{dt}(u\cdot v) = u'\cdot v + u\cdot v'$

d) $\frac{d}{dt}(u\times v) = u'\times v + u\times v'$

e) $\frac{d}{dt}(u(\lambda(t))) = \lambda'(t)\,u'(\lambda(t))$

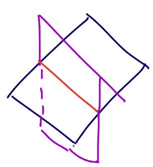
Ex: I exemplet ovan var farten konstant ($|\vec{v}|=\sqrt{2}$). Konstant fart $\Leftrightarrow$ $|r'(t)|$ är konstant $=\sqrt{r'(t)\cdot r'(t)} \Leftrightarrow$
$r'(t)\cdot r'(t)$ är konstant $\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(r'(t)\cdot r'(t)) = 0$

Enligt c) är $\frac{d}{dt}(r'(t)\cdot r'(t)) = r''(t)\cdot r'(t) + r'(t)\cdot r''(t) = 2\,r''(t)\cdot r'(t)$.

Slutsats: Farten är alltså konstant omm accelerationen är vinkelrät mot hastigheten.

11.3, Kurvor och Parametrisering

Ex: 2 plan ① $3x+4y+5z=0$
② $4x+4y+6z=0$



Snittet mellan planen: ②-① $= (4x+4y+6z)-(3x+4y+5z) =$
$x+z=0 \Rightarrow x=-z$

Insättning i ① $\rightsquigarrow 3x+4y+5(-x)=0 \rightsquigarrow y=\frac{1}{2}x$

Låt nu $x=t \rightarrow y=\frac{1}{2}t,\ z=-t$

Alltså är $r(t)=(t,\frac{1}{2}t,-t)$ en partikel som ritar ut banan som är snittet av planen.

11.3 Parametrisering av en kurva

Def
$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ parametriserar en kurva ℓ i $\mathbb{R}^3$ om $\vec{r}$ exakt täcker upp ℓ. Den får emellertid inte träffa flera gånger.

Ex
$\ell: x^2+y^2=1$, en parametrisering ges av $\vec{r}(t)=(\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq x \leq 2\pi$ eller $t \in (\pi, 3\pi]$

Ex
Något som inte är en parametrisering av samma ℓ är $r(t)=(\cos(t), \sin(t))$ $t \in \mathbb{R}$. Detta eftersom $\vec{r}$ träffar punkter fler än en gång.

Ex
Betrakta snittet av Planet $\pi: x+y+z=3$ ① och den elliptiska cylindern: $4x^2+y^2=9$ ②.

② Cylinder med godtyckligt z. Ett uttryck ges av $\left(\frac{3\cos t}{2}, 3\sin t, z\right)$.
① Ger att $z=3-x-y=3-\frac{3}{2}\cos(t)-3\sin(t)$

Alltså ges parametrisering av $\vec{r}(t)=\left(\frac{3}{2}\cos(t), 3\sin(t), 3-\frac{3}{2}\cos(t)-3\sin(t)\right)$ $t \in [0, 2\pi)$.

Kurvlängd
En sluten och begränsad kurva ℓ har oftast en längd. $|\ell|$ = längd för en kurva.

Antag att vi har en parametrisering $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$. Vad är längden mellan a och t?
$S(t)$ = kurvlängden

Alt 1
Vad är $S'(t)$? $\frac{dS}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}$ = avstånd mellan $r(t+h)$ och $r(t)$, delat med h. $r(t+h) \overset{\text{litet } h}{\approx} r(t)+V(t)\cdot h$
$\left|\frac{r(t+h)-r(t)}{h}\right|=|V(t)|=|r'(t)|$, $S'(t)=|r'(t)| \Rightarrow S(t)=\int_a^t |r'(t)|dt+C$. Eftersom $S(0)=0 \Rightarrow C=0$

Alt 2
Formeln för avstånd mellan $r(t+h)$ och $r(t)$ kommer vara $\sqrt{dx^2+dy^2} \overset{\text{Förläng med } dt}{=} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$
och sedan integrerar vi och får samma resultat.

Specialfall: $y=f(x)$ $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$
Längden mellan a och b. Parametrisera a mha $v(x)=(x,f(x))$

Viktigt: Med parametrisering

Ex
Räkna ut längden mellan tiden 1 och e^2 för den parametriserade kurvan $\vec{r}(t)=(t^2, 2t, \ln(t))$ enligt formeln: $\int_1^{e^2}\sqrt{(2t)^2+2^2+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_1^{e^2}\sqrt{4t^2+4+\frac{1}{t^2}}\,dt$

Kvadratkomplettera! $4t^2+4+\frac{1}{t^2}=\left(2t+\frac{1}{t}\right)^2$

$\int_1^{e^2}\sqrt{\left(2t+\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_1^{e^2} 2t+\frac{1}{t}\,dt=\left[t^2+\ln(t)\right]_1^{e^2}=e^4-1+2\ln e=e^4+1$

12.1 Funktioner i flera variabler & Nivåytor/kurvor

Vi betrakter $f: \begin{matrix} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{matrix}$ m.m.

Ex

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ger problem om $1-x^2<0$ ty det är jobbigt med komplexa tal.

Def

En mängd $U \subseteq \mathbb{R}^n$ är en domän eller definitionsmängd till f om $f: U \to \mathbb{R}$.

I exemplet ovan är maximala domänen alla x s.a. $1-x^2 \geq 0$, dvs intervallet $[-1,1]$.

Def

En mängd $V \subseteq \mathbb{R}$ är en målmängd om f tar sina värden i V.

Ex

$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

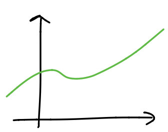
Domän: Alla (x,y) s.a. $x^2+y^2 \neq 0$ dvs $\mathbb{R}^2 \setminus$ origo.

Målmängden: Alla positiva tal $\neq 0$. $\mathbb{R}>0$

$f: \mathbb{R}^2 \setminus \text{origo} \to \mathbb{R}>0$

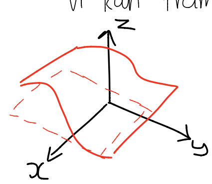
Grafer till funktioner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$n=1$: $y=f(x)$



$n=2$: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ex att f är temp i (x,y)

Vi kan framställa detta grafiskt som $z =$ temperatur $= f(x,y)$



Om vi har $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hur gör vi då? Ja, det är svårt med 4-dim bilder så vi skippar att rita dem och använder oss av nivå-ytor/kurvor.

Def

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ges nivåytorna till f vid C av alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $f(\vec{x}) = C$

Ex

$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

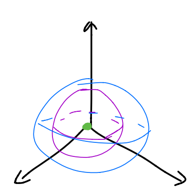
Vad är nivåytorna?

$f(x,y,z) = C$ för $C = 0,1,2$

$C=0$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 0$ dvs $x=y=z=0$

$C=1$, $f(x,y,z) = 1$ dvs sfär med $r=1$

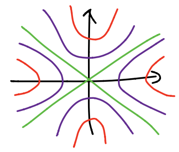
$C=2$ $f(x,y,z) = 2$ — " — $r=\sqrt{2}$



Ex

På en nivåkurva $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$

Nivå $C = 0, 1, 2$



$C=0$: $x^2 - y^2 = 0 = (x-y)(x+y) \Rightarrow x = y$

$C=1$: $x^2 - y^2 = 1$

$C=2$: $x^2 - y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 2}$

$x = \pm\sqrt{y^2 + 2}$

12.2 Gränsvärden och Kontinuitet

Detta är den teoretiska bakgrunden till partiella derivator. (Vi kommer förmodligen inte använda dom så mycket...)

Kontinuerlig = Vi kan rita en graf utan att lyfta pennan, intuitivt.

Def

$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \subseteq \mathbb{R}$

Vi säger att $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$ om 1) Varje omgivning till (a,b) innehåller element i domän U.

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.a. om $(x,y) \in U$ och $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

$\Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$

Vi säger också att f är kontinuerlig i (a,b) om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

De gränsvärden vi betrakter existerar inte, och då får vi visa det, eller kan återföras på ett std-gränsvärde från envariabeln.

Ex

$f(x,y) = \frac{x}{y}$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ Om gränsv finns så ska åtminstone alla valda linjer, t.ex. (x,kx) eller (kx,x) ha samma gränsvärden vid insättning i f då $x \to 0$.

Testa: $(x,3x)$ $f(x,y) = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

$(x,2x)$ $f(x,y) = \frac{1}{2}$

Speciellt då $x \to 0$ får vi 2 olika värden så gränsv. existerar ej.

12.2 | Kontinuitet och Gränsvärden

För definitionen av $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \in \mathbb{R}$, se MVA 1.3

Ex Finns $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$?

Testa med väl valda linjer. Test 1: $l_1: (x,0) \Rightarrow f(x,0)=\frac{x\cdot 0}{x^2+0}=0 \Rightarrow$ Om gränsvärde finns är det lika med 0.

Test 2: $l_2: (x,x) \Rightarrow f(x,x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\neq 0 \Rightarrow$ GV existerar ej

Regler

Låt: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=M$

Då gäller att: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f}{g}=\frac{L}{M}$, $M\neq 0$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f+g) = L+M$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f\cdot g) = L\cdot M$

Ex Vad är $\lim_{(x,y)\to(5,5)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$?

Gränser för $x-y=0$, $x^2-y^2=0$

$x^2-y^2=(x+y)(x-y) \Rightarrow \frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{1}{x+y}$ & $\lim_{(x,y)\to(5,5)} \frac{1}{x+y}=\frac{1}{10}$

Ex Variant på exempel $\frac{xy}{x^2+y^2}$

Sätt istället $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$. Finns GV i $(0,0)$? Notera att $x^2\leq x^2+y^2$.

$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right| \leq \left|\frac{(x^2+y^2)y}{(x^2+y^2)}\right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

Bevis för att GV är 0: Givet $\varepsilon>0$ kan man ta $\delta=\varepsilon$ och då, om
$|(x,y)-(0,0)|=|(x,y)|=\sqrt{x^2+y^2} < \underset{\varepsilon}{\underset{\shortparallel}{\delta}} \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right| < \underset{\varepsilon}{\underset{\shortparallel}{\delta}}$

Ex Vad är $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$?

Sätt $t=x^2+y^2 \rightsquigarrow \frac{\sin(t)}{t}$ & $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t}=1$

12.3 | Partiella derivator och tangentplan

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)$. Vi vill ha ett mått på hur f ändrar sig i x- och y-riktning.

Def

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$

Ex $f(x,y)=3x^2y-\sin(x)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=?$ y-variabeln tolkas som konstant. $\frac{\partial f}{\partial x}=3\cdot 2xy-\cos(x)=6xy-\cos(x)$

$\frac{\partial f}{\partial y}=?$ x tolkas som en konstant. $\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2$

Ex $f(x,y) = x^2y$

Betrakta nu $f(x^2, xy) = x^4(xy) = x^5y$

Det finns två sätt att tolka $\frac{\partial f}{\partial x}$. 1) $\cancel{\frac{\partial}{\partial x}(x^5y) = 5x^4y}$

2) Sätt $u = x^2$, $v = xy$. $\frac{\partial f}{\partial u}(u^2v) = 2uv = 2x^2(xy) = 2x^3y$

Om man använder definitionen som gavs ovan skall $\frac{\partial f}{\partial x}$ bara derivera i första variabeln, dvs den som kallas u.

Istället kan f_1 eller f_x användas för $\frac{\partial f}{\partial x}$ osv.

Man kan fortsätta derivera partiellt $f_1 \to f_{11}, f_{12}$

$f_2 \to f_{21}, f_{22}$

Sammanfattning av 12.4

Alla blandade derivator, dvs $f_{12}, f_{21}, \dots$, är oberoende av ordning. $f_{112} = f_{121} = f_{211}$

Ex Låt $f(x,y) = e^{kx}\sin(ky)$ Räkna ut f_{11} & f_{22} visa att $f_{11} + f_{22} = 0$.

$f_{11} = (f_1)_1$

$f_1 = k \cdot e^{kx}(\sin(ky))$, $f_{11} = k^2e^{kx}(\sin(ky))$

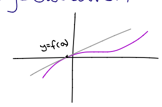
$f_2 = ke^{kx}\cos(ky)$

$f_{22} = -k^2e^{kx}\sin(ky)$

$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right) = f_{11} + f_{22} = k^2e^{kx}\sin(ky) - k^2e^{kx}\sin(ky) = 0$

Detta är ett exempel på en operator: Laplace-operatorn. (Värmeledningsekvationen utan tidsberoende)

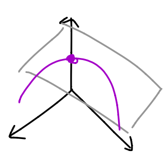
En viktig tillämpning av partiella derivator är tangentplan. En variabel: $y = f(x)$



$y - f(a) = f'(a)(x-a)$ är tangentlinjens ekvation.

Vi vill modellera tangentplan till funktionsytor/grafer till $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$z = f(x,y)$



En vektor som bestämmer en tangentlinje.

Vi behöver två vektorer som spänner upp planet. I fallet dimension 1, $f'(x) \cdot 1$.

Ta vektorn som pekar åt hur f växer i x-led. Dvs, detta bestäms av $f_1 / \frac{\partial f}{\partial x}$ av

$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $T_1 = (1, 0, f_1)$

y-led: $T_2 = (0, 1, f_2)$

Hur får vi ut tangentplanet från dessa två? Jo, vi tar vektorprodukten mellan T_1 och T_2.

$T_2 \times T_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & f_2 \\ 1 & 0 & f_1 \end{vmatrix} = (f_1, -(-f_2), -1) = (f_1, f_2, -1) = \vec{n}$, planet går genom $(a, b, f(a,b)) \Rightarrow$

$f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$ är alltså tangentplanets ekvation

Ex Bestäm tangentplanets ekv $z = f(x,y) = x^2y - x^4$ punkten $(1,1,0)$

$\left.\begin{array}{l} f_1 = 2xy - 4x^3 \\ f_2 = x^2 \end{array}\right\}$ då $(x,y) = (1,1) \to f_1 = -2$, $f_2 = 1 \Rightarrow$ Tangentplan: $-2(x-1) + 1(y-1) - (z-0) = 0$

$y - 2x - z = -1$

Ex $z=Ax+By+C$, Vad är tangentplanet i en punkt $(a,b,Aa+Bb+C)$?
Vi ska få samma plan igen.

$f_1=A$
$f_2=B$ i formel: $A(x-a)+B(y-b)-(z-(Aa+Bb+C))=0$

$$\iff Ax-Aa+By-Bb-z+Aa+Bb+C=0$$
$$\iff Ax+By+C=z$$

QED

Envariabelfallet är $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$

Ett annat sätt att skriva om tangentlinjens ekvation.

Då borde $\underbrace{f(a+h,b+k)\approx f(a,b)+f_1(a,b)h+f_2(a,b)k}$,

Omskrivning av tangentplanets ekvation
$h=x-a$, $k=y-b$ om (h,k) litet

HL är en linjärapprox till $f(x,y)$ i punkten (a,b).

12.5 Linjära approximationer & Deriverbarhet
Fråga: Hur bra är den linjära approximationen?

Def
$f(x,y)$ är deriverbar i punkten (a,b) om $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f_1(a,b)h-f_2(a,b)k-f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$

linjära approx

Täljaren går snabbare mot 0 än $\sqrt{h^2+k^2}$ => Annat sätt att säga att linj appx är bra.

Sats 4
Om f_1 och f_2 existerar & är kontinuerlig i en omgivning till (a,b) => f är differentierbar i (a,b).

12.5-6 |

Utifrån tangentplan har vi fått s.k. linjära approximationer.

$f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Tangentplanet till funktionsytan $z=f(x,y)$ i $(a,b,f(a,b))$ ges av $f_1(a,b)(x-a)+f_2(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$

Linjäriseringen ges av: $Lf(a+b, h+k) = f(a,b)+f_1(a,b)h+f_2(a,b)k$

$Lf(x,y) = f(a,b)+f_1(a,b)(x-a)+f_2(a,b)(y-b)$

Deriverbarhet $\Leftrightarrow$ Linj appx är "bra" (små feltermer)

För att gå från den ena formeln till den andra sätts $x=a+h$, $y=b+k$ alternativt $h=x-a$, $k=y-b$.

<u>Sats</u>

f deriverbar om f_1 & f_2 kontinuerliga

<u>Kedjeregel</u>

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(\lambda(t))' = f'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t) = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt}$

Vi vill få bra formler för $\frac{\partial}{\partial s} f(u(s,t), v(s,t))$ & $\frac{\partial}{\partial t}(u(s,t), v(s,t))$, $u(s,t): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $v(s,t): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Typiskt om man vill göra variabelbyte.

Hypotes: $a=b=f(a,b)=0$

$u(0,0)=v(0,0)=0$

Vi vill visa att $L(f(u,v)) = Lf \cdot (Lu, Lv)$

$u(s,t) \approx Lu = \frac{\partial u}{\partial s} s + \frac{\partial u}{\partial t} t$

$v(s,t) \approx Lv = \frac{\partial v}{\partial s} s + \frac{\partial v}{\partial t} t$

(Betraktar jag linjeriseringar map (u,v) & (s,t).

$f \approx Lf = \frac{\partial f}{\partial s} s + \frac{\partial f}{\partial t} t = \frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v \approx \frac{\partial f}{\partial u} Lu + \frac{\partial f}{\partial v} Lv = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial s} s + \frac{\partial u}{\partial t} t\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial s} s + \frac{\partial v}{\partial t} t\right)$

Jämför två uttryck för Lf.

1. $Lf = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)s + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)t$
2. $Lf = \frac{\partial f}{\partial s} s + \frac{\partial f}{\partial t} t$

$f \neq Lf$, men om f diff $\Rightarrow$ $f = Lf +$ liten felterm

$u = Lu +$ — " —

$v = Lv +$ — " —

Feltermerna kommer inte spela någon roll för sammansättningen $\Rightarrow$ s-linjära termerna & t-linjära termerna motsvarar varandra.

<u>Formler</u>

$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$

$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$

<u>Ex</u>

Triggettan mha kedjeregeln.

$f(u,v) = u^2+v^2$, $u=\cos t$, $v=\sin t$ (ingen s-variabel)

$f(\cos t, \sin t)=1$

Vill visa att deriv i t är $0 \Rightarrow f(\cos t, \sin t) = $ konst. $f=1$ m g test

$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial u} = 2u, \ \frac{\partial f}{\partial v} = 2v \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\sin t, \ \frac{\partial v}{\partial t} = \cos t \end{array}\right\} \frac{\partial f}{\partial t} = 2\cos t(-\sin t) + 2\sin t \cos t = 0$$

$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$

Ytterligare härledning av formeln i linjära fallet: $f(u,v) = Au + Bv$, $\frac{\partial f}{\partial u} = A$ $\frac{\partial f}{\partial v} = B$
$u(s,t) = a \cdot s + bt$, $\frac{\partial u}{\partial s} = a$ $\frac{\partial u}{\partial t} = b$
$v(s,t) = cs + dt$ $\frac{\partial v}{\partial s} = c$ $\frac{\partial v}{\partial t} = d$

Vill ha deriv. av sammansättningen: $f(u(s,t), v(s,t)) = A(as+bt) + B(cs+dt) = (Aa + Bc)s + (Ab + Bd)t$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} = Aa + Bc$
$\frac{\partial f}{\partial t} = Ab + Bd$ } Insättning av ◯ bekräftar kedjeregeln.

Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\lambda: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\lambda(s,t) = (u(s,t), v(s,t))$

$df = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$ vektor $d\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$ Kedjeregeln: $d(f \circ \lambda) = df \circ d\lambda$ ← vanliga kedjeregeln

Ex

Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y^2, x+y)$ & $\frac{\partial f}{\partial y}(x^2+y^2, x+y)$ i termer av f_1 och f_2.

$F(x,y) = f(\underbrace{x^2+y^2}_{u}, \underbrace{x+y}_{v})$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_1 \cdot 2x + f_2 \cdot 1$ $\qquad$ $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = f_1 \cdot 2y + f_2 \cdot 1$

Tredje gången.....
Kedjeregeln enl. boken i en variabel

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u = u(t)$, $v = v(t)$, finns inget s.

$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$

"Bevis"
$g(t) = f(u(t), v(t))$
$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dg}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h} = \left[\begin{matrix}\text{lägg till, dra bort} \\ f(u(t), v(t+h)\end{matrix}\right] =$

ingen h-beroende i första variabeln

$\lim_{h \to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h) - f(u(t), v(t+h))}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t), v(t+h) - f(u(t), v(t))}{h}$ ⇒ Andra termen är en vanlig sammansätt av 1-var-funktionen ⇒ Vanlig kedjeregel
⇒ Andra termen $= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$
~ Med lite våld ia första termen $\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}$

Ex

$f(u,v) = u^2 v$, $u = \cos(xy)$, $v = e^x$ Vad är $\frac{\partial f}{\partial x}$ & $\frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2uv(-y(\sin(xy)) + u^2 \cdot e^x = 2\cos(xy)e^x(-y\sin(xy) + \cos^2(xy)e^x$
$\frac{\partial f}{\partial y}$ = P.S.S.

Idén är att linjäriseringarna ger goda approximationer som vi fick från geometri.
Vad betyder de?

$\lambda(s,t) = (u(s,t), v(s,t)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad d\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$ ← Matrisen är en linjär avbildningen mellan tangentplanet som def av olika ytor.

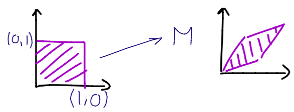
Detta kallas Jacobimatrisen av transformationen $(u(s,t), v(s,t)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Def

det|M| = Jacobiderminanten, den mäter hur mycket volymen/arean ändras under avbildningen
(Funktionaldeterminanten)

Ex

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

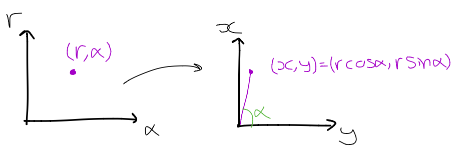


← |det M| = volym/area · ändring dvs arean av parallellogram

Ex

$x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ } Polära koordinater

Jacobi matrisen M och det M?



$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}$

$\det M = (\cos\alpha \cdot r\cos\alpha - (-r\sin\alpha \cdot \sin\alpha)) = r(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = r$

12.7 | Gradienter och Riktningsvektorer

Def

$\nabla f = (f_1, f_2)$ = gradienten till funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

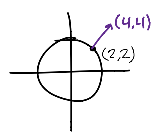
Ex

Jacobimatrisen M för $(u(s,t), v(s,t))$ $\quad M = \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \end{pmatrix}$ $\quad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j\right)$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j\right)$

Ex

$f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \nabla f = (2x, 2y)$
i punkten $x = y = 2$ kommer $\nabla f(2,2) = (4,4)$



Notera att vektorn $\nabla f(2,2)$ är ortogonal till tangentlinjen till nivåkurvan.
$(2\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2$

Ex

$f(x,y) = 5x + 3y - 7$, gradienten i $(1,1)$

$\nabla f = (5,3) \Rightarrow z(1,1) = 5 + 3 - 7 = 1$

Kurvan $5x + 3y = 8$ är en nivåkurva till $z = 1$. Vektorn $(5,3)$ är exakt normalen till kurvan.

Sats

$\nabla f(a,b)$ är ortogonal till tangenten till nivåkurvan $z = f(x,y)$ för fixt x, y. $f(a,b) = f(x,y)$
Om $\nabla f(a,b) \neq 0$

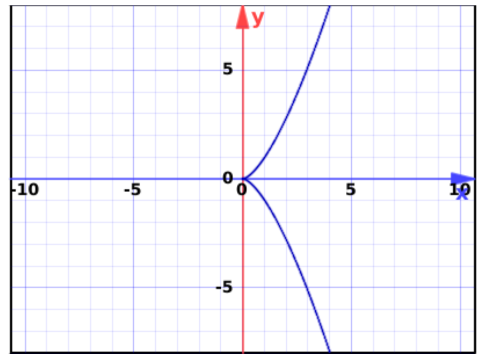
Motexempel

$z = x^3 - y^2$, $(0,0)$ $\Rightarrow \nabla f(3x^2, -2y)$, $z = 0 = x^3 - y^2 \Rightarrow x^3 = y^2$

relevant nivåkurva

Blir konstig när man riter....

Kurvan $y^2 = x^3$
Detta är en singularitet,
en s.k. spets.



Bevis

Betrakta $z = c = f(x,y)$. Antag att vi har en parametrisering. $C = f(x(t), y(t)) =$ konst.

$$\frac{dc}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (x', y') = 0$$

dot product

tangentvektor/
hastigheten

Tack till den stere komikern för anteekningarna!

Kedjeregeln

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $u(s,t)$, $v(s,t):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\lambda(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Deriverbarhet $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \rightsquigarrow \nabla f=(f_x,f_y,f_z)$, P.S.S. $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

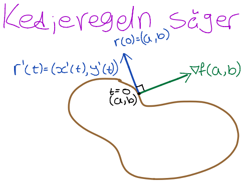
Sats

Om $\nabla f(a,b)\neq 0$ är $\nabla f(a,b)$ ortogonal mot tangenten på nivåkurvan $c=f(a,b)=f(x,y)$

Bevis

Parametrisera nivåkurvan med $r(t)=(x(t),y(t))$, $g(t)=f(x(t),y(t))=$ konstant $\Rightarrow$ derivata $=0$

Kedjeregeln säger även ~~att~~ $\nabla f(a,b)\cdot \underbrace{(x'(t),\ y'(t))}_{\text{Hastighet/Tangentvektor vid en given tid.}}=\frac{dr}{dt}=0$



Gradienten kommer hjälpa oss förstå hur f växer (likt derivatan i en-variabel).

Antag att vi har en riktning (u,v), $\sqrt{u^2+v^2}=1$, dvs längd 1. Hur snabbt ökar f i riktningen (u,v) från punkten (a,b)?

$g(t)=f(a+tu,\ b+tv)$

$g'(t)=[\text{kedjer.}]=\frac{\partial f}{\partial t}=f_1\frac{\partial(a+tu)}{\partial t}+f_2\frac{\partial(b+tv)}{\partial t}=f_1u+f_2v=(f_1,f_2)\cdot(u,v)=\nabla f(a,b)\cdot(u,v)$

Def

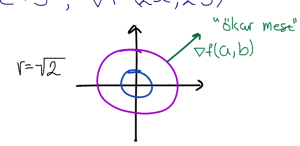
Riktningsderivatan av f i riktningen $\vec{u}=(u,v)$ skrivs som $D_{\vec{u}}f:=\nabla f(a,b)\cdot\vec{u}$

$\nabla f(a,b)\cdot\vec{u}=|\nabla f(a,b)|\cdot|\vec{u}|\cos\alpha$, där α är vinkeln mellan vektorerna. Om $\vec{u}$ & $\nabla f(a,b)$ är ortogonala ändras inte f alls ($\cos\alpha=0$) $\rightsquigarrow$ dvs $\vec{u}$ är en tangentvektor till nivåkurvan $C=f(a,b)=f(x,y)$

Den riktning där f ökar mest är när $\cos\alpha=1$, $\vec{u}=\frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$, och den avtar mest när $\cos\alpha=-1$, $\vec{u}=\frac{-\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$.

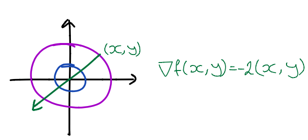
Ex

$Z=x^2+y^2$, $\nabla f=(2x,2y)$



Ex

$Z=-x^2-y^2$, $\nabla f=(-2x,-2y)$



Ortogonalitet

Vad är tangentplanet till nivåytan i $P=(1,1,1)$?

$30x^2-4yz-26=0 \leftarrow$ nivåyta

$Z=\frac{30x^2-26}{4y} \leftarrow$ funktionsyta

$$\left.\begin{aligned} f_1&=60x=60\\ f_y&=-4z=-4\\ f_z&=-4y=-4\end{aligned}\right\}\ 60(x-1)-4(y-1)-4(z-1)=0$$

Funktionsytor: $Z=f(x,y)$

Nivåytor: $C=f(x,y,z)$

Funktionsyta ger nivåyta:

Formel för tangentplanet till $g(x,y,z)=0=f(x,y)-z$.

Normalen ges av $Dg=(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,-1)$

För att komma från funktionsytan till nivåytan sätter man $F(x,y,z)=f(x,y)-Z$ och tittar på nivån $F(x,y,z)=0$.

Ex 8 i 12.7

Hitta en tangentvektor till kurvan som skärs ut av $z=x^2-y^2$, $xyz+30=0$ i $P=(-3,2,5)$.

Parametrisera skärningen, $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ & $r'(t)$. Svårt att para skärningen.
Hitta tangentplan till ytorna & skärningen (egentligen är det två normaler till planet man vill ha) => hitta vektor som är ortogonal mot dessa. N_1 & $N_2 \Rightarrow N_1 \times N_2$

$F=z-x^2+y^2$, $G=xyz+30$, $\nabla F=(-2x,2y,1)=(6,4,5)$
$\nabla G=(yz,xz,xy)=(10,-15,-6)$

$$N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -4 & -1 \\ 10 & -15 & -6 \end{vmatrix} = -9i-46j+136k$$

12.9 | Taylorutveckling

Taylorutvecklingar i en variabel, om f är $k+1$ ggr deriverbar funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$f(t)=f(0)+f'(0)t+f''(0)\frac{t^2}{2!}+f'''(0)\frac{t^3}{3!}+\ldots+f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}+\underbrace{f^{(k+1)}(0)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}_{\text{felterm}}$$

Vi vill göra något liknande för funktioner i flera variabler. $\underbrace{}_{\text{Taylorutveckling}}$
Antag att vi har en vekter $\vec{u}=(h,k)$. $F(t,h,k)=F(t)=f((a+th),(b+tk))$. Söker T-utv runt (a,b).

$$F(t)=F(0)+F'(0)\cdot t+\frac{F''(0)}{2!}+\frac{F'''(0)}{3!}+\ldots$$

Kedjeregeln: $F'(t)=F_1\cdot\frac{\partial(a+th)}{\partial t}+F_2\frac{\partial(b+tk)}{\partial t}=F_1\cdot h+F_2\cdot k=\nabla F\cdot(h,k)=\nabla F\cdot\vec{u}$

Och speciellt om $t=0$: $F'(0)=\nabla F(a,b)\cdot\vec{u}$

Def

Första ordningens T-appx till t i $P=(a,b)$ ges av
$P_1(a+h,b+k)=(a,b)+f_1(a,b)h+f_2(a,b)k$
$P_1(x,y)=f(a,b)+f_1(a,b)(x-a)+f_2(a,b)(y-b)$

Självklart finns feltermer, $f(x,y)\neq P(x,y)$. För att få bättre approx tar vi högre ordningens T-utv. Om vi sätter $\vec{u}\cdot\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)$: $F'(t)=(u\cdot\nabla)F(t)$
$F^{(n)}(t)=(u\cdot\nabla)^k\cdot F(t)$

För att få $F''(0)$ så kan vi räkna ut $(u\cdot\nabla)^2=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Slutsats: $F''(0)=h^2f_{11}(a,b)+2hkf_{12}(a,b)+k^2f_{22}(a,b)$

Andra gradens T-appx ges av: $P_2(a+h,b+k)=f(\underset{\text{Punkt}}{a,b})+\underbrace{f_1(a,b)h+f_2(a,b)k}_{\nabla f(a,b)\cdot(h,k)\text{ vekter}}+\overbrace{\frac{h^2f_{11}(a,b)}{2}+\frac{2hkf_{12}(a,b)}{2}+\frac{k^2f_{22}(a,b)}{2}}^{\text{Matris}}$

Hädanefter kommer vi utsättas för 3-dim matriser osv... Varför matriser?

$$[h,k]\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k\end{bmatrix}=h^2f_{11}(a,b)+2hkf_{12}(a,b)+k^2f_{22}(a,b)$$

Matrisen (som bestämmer den kvadratiska formen) kallas Hessianen.
1-var: $f(t)=f(0)+f'(0)t+f''(0)\frac{t^2}{2}+\ldots$
$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\nabla f\cdot(h,k)+[h,k]\cdot\frac{1}{2}\cdot\text{hess}\begin{bmatrix} h \\ k\end{bmatrix}$ Hessianen säger mycket om krökningen/max/min etc.

12.9 | T-utv för funktioner $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1:a ordningens approx $P(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$ i (a,b) för $f(x,y)$.
$P_1(a+h, b+k) = f(a,b) + f_1(a,b)h + f_2(a,b)k$

Samma sak som linjeriseringen till f i (a,b). $Lf = R$

Vad kan sägas om $|f - P_1|$? Om $|(x,y)-(a,b)|$ litet så borde/vill man att $|f-P_1|$ litet. Det här är ok om f är differentierbar flera ggr.

f är differentierbar om: $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - Lf}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ $\quad f(a+h, b+k) = Lf + $ något som går snabbare mot 0 än $\sqrt{h^2+k^2}$.

Speciellt om $(h,k) \to (0,0)$ så $f(a+h, b+k) \to P_1(a,b) + \underbrace{0}_{\text{Felterm}} \to Lf(a,b) \to f(a,b)$

$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k) = f(a,b)$ dvs f kont (a,b)

Viktigt!

Numeriska approximationer. Hur räknar en dator ut $\sin(0{,}01)$?
T-utv! Uppskatter felet som fås mha medelvärdessatsen.

Desto längre man går desto bättre approximationer. I den här kursen nöjer vi oss med grad 2.

Ex

$f(x,y) = x^2 + y^2$. Ange $P_2(0,0)$

Formel:

$$P_2(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) + \tfrac{1}{2}\left(f_{11}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{12}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{22}(a,b)(y-b)^2\right)$$

Vad är $f_1, f_2, \ldots$ $\quad f_1 = 2x \quad f_{11} = 2 \quad f_{12} = 0$
$\quad f_2 = 2y \quad f_{22} = 2$

i $(0,0)$: $P_2 = 0 + 0(x-0) + 0(y-0) + \tfrac{1}{2}\left(2(x-0)^2 + 2\cdot 0(x-0)(y-0) + 2(y-0)^2\right) = x^2 + y^2$

Ex

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy^2$ i $(0,0)$

$f_1 = 2x + 3y^2 \quad f_{11} = 2 \quad f_{12} = 6y$
$f_2 = 2y + 6xy \quad f_{22} = 2 + 6x$

i $(0,0)$ $\Rightarrow$ $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_{11} = 2$, $f_{22} = 2$, $f_{12} = 0$ $\Rightarrow P_2 = x^2 + y^2$

samma värden som förra

Ex

$f(x,y) = y^2 - x^3 \quad (1,1)$

$f_1 = -3x^2 \quad f_{11} = -6x \quad f_{12} = 0$
$f_2 = 2y \quad f_{22} = 2$

$\Rightarrow (1,1) \Rightarrow f_1 = -3 \quad f_{11} = -6 \quad f_{12} = 0$
$f_2 = 2 \quad f_{22} = 2$ $\Rightarrow$ Insättning........

"Kapa av metoden" kan användas om graden överstiger två om man gör en omskrivning.

Ex 2 ovan: $\left.\begin{array}{l} s = x-1 \\ t = y-1 \end{array}\right\}$ $y^2 - x^3 = (t+1)^2 - (s+1)^3 = t^2 + 2t + 4 - (s^3 + 3s^2 + 3s + 1) = 2t - 3s + t^2 - 3s^2 - \cancel{s^3}$ KAPAN $=$
$2(y-1) - 3(x-1) + (y-1)^2 - 3(x-1)^2$

Lär dig Pascals triangel igen.....

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

OSV

<u>Ex</u>

P_2 för $\sin(x+2y)$ i $(0,0)$

Alt 1: Använd formeln $P_2 = Lf +$ kvadratiskt bss...
Alt 2: Återför på envariabelfall och kapa av.

<u>A2 |</u>

$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - h.o.t.$ Sätt in $t = x+2y \Rightarrow \sin(x+2y) = (x+2y) - \underbrace{\cancel{\frac{(x+2y)^3}{3!} + \frac{(x+2y)^5}{5!}}}_{\text{grad} > 2 \,=\, \times} - \ldots\ldots$

$P_2 = (x+2y)$

13.1 | Extremvärdesproblem

I envariabeln hittar man kritiska punkter till en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom att leta efter $f'(t) = 0$. Sen klassificerar man punkten genom att studera $f''(t)$.

I flera variabler borde f' ersättas med ∇f och f'' med $H(f)$ hessianen.

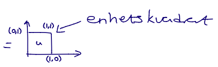
<u>Def</u>

$f(x,y): \quad U \to \mathbb{R}$
$\qquad\quad U \subseteq \mathbb{R}^2$

(a,b) är ett lokalt max om det för alla (x,y) i en ~~liten~~ godtyckligt omgivning till (a,b) gäller att $f(x,y) \leq f(a,b)$. Ett lokalt min def analogt.

Om vi byter ut lokalt met globalt kräver vi olikheterna för alla (x,y).

<u>Ex</u>

$f(x,y) = x^2 + y^2$, $U =$ 

Max och min lätta: Max: $(1,1)$ med värde 2
Min: $(0,0)$ — " — 0

$\nabla f = (2x, 2y)$ och $= 0$ om $x = y = 0$.

Men $\nabla f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{globalt max}}}{1,1}) \neq (0,0)$

<u>Ex</u>

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ med $U =$ enhetskvadraten

P.S.S. Max: $(1,1)$ med värde $\sqrt{2}$.
Min: $(0,0)$ — " — 0.

$\nabla f = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right) \neq (0,0)$ i $(1,1)$
$\nabla f(0,0)$: Gränsvärdet finns ej då $x,y \to 0,0$
Så $\nabla f(0,0)$ är odef.

Sats

Om $f(x,y)$ har ett lokalt max eller min i (a,b) gäller ett av följande alternativ.

Alt 1: $\nabla f(a,b)$ är odef. (andra ex)
Alt 2: $\nabla f(a,b) = (0,0)$
Alt 3: $\nabla f(a,b)$ är en randpunkt till U. $(a,b) \in \partial U$

Def

U är kompakt om U är sluten och begränsad. (Händer att man skriver K istället för U.)

Sats

Om $U=K$ kompakt så har $f: K \to \mathbb{R}$ alltid ett globalt max och min.

Def

En punkt är kritisk till $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ om $\nabla f(a,b) = 0$.

Vad kan sägas om olika kritiska punkter?

$P_1(x,y)$ i $(a,b) = f(a,b) + \underbrace{\cancel{\nabla f(a,b)}}_{=0} \cdot (x-a, y-b) = f(a,b)$ ty kritisk punkt

Vad är $f(x,y) - P_1(x,y)$?
En felterm som är kvadratisk (medelvärdessats)

Vad är istället $f(x,y) - P_2(x,y)$
En kubisk felterm.

$$f(x,y) \approx P_2(x,y) = f(a,b) + \tfrac{1}{2}\left(f_{11}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{12}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{22}(a,b)(y-b)^2\right)$$

$$P_2(a+h, b+k) = f(a,b) + \tfrac{1}{2}[h,k] \cdot H(f)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Ser ut som att Hessian bestämmer hur f uppför sig runt (a,b) (P_2).

Vad kan vi säga om uttryck på den här formen?

$[h,k]\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$? Linalgen säger att vi kan diagonalisera $H(f) \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Nya kvadratiska uttrycket blir $\lambda_1 h^2 + \lambda_2 k^2$. Om $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ kommer $H(f) > 0$ om $(h,k) \neq (0,0)$
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ $H(f) < 0$ — '' —
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ eller $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ $H(f) > 0$ eller $H(f) < 0$
$\lambda_1 = 0$ eller $\lambda_2 = 0$ $H(f) = 0$, kanske trots att — '' —

Kvadratisk form

$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ är
pos def: $f(x,y) > 0$ om $(x,y) \neq (0,0)$
neg def: $f(x,y) < 0$ — '' —
indefinit: $f(x,y) \geq 0$, ≤ 0 ibland det ena, ibland det andra.

Kan användas för att ge oss en uppfattning av hur grafen till f ser ut i närheten av en kritisk punkt.

Test: $f_{11}(a,b)=A$, $f_{12}(a,b)=B$, $f_{22}(a,b)=C$

* $B^2-AC<0$, $A>0$ Pos def
* $B^2-AC<0$, $A<0$ neg def
* $B^2-AC>0$ indefenit
* $B^2-AC=0$ varken eller

Kritisk Punkt (a,b)

$Df(a,b)=0$

* lokalt max ~ $H(f)$ neg def
* lokalt min $H(f)$ Pos def
* Sadelpunkt $H(f)$ indefenit
* Ger $H(f)$ ingen info varken eller

Kallas dock sadelpunkt i boken.

13.1 Extremvärdesproblem & lokala karaktäriseringar av kritiska punkter

Vill studera lokalt beteende för kritiska punkter till funktioner $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eller $f: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Kr pkt: $\nabla f(a,b) = 0$

(a,b) s.a.

Vi vill veta när dessa pkter är lokala max, min eller inget av detta. Varken eller kallas i boken för sadelpunkt. Genom taylorpolynom!

$f(x,y) \approx P_2(x,y)$ i punkten (a,b).

$$P_2(x,y) = f(a,b) + \underbrace{\cancel{\nabla f(a,b)(x-a)(y-b)}}_{=0 \text{ ty kritisk p}} + \frac{1}{2}[(x-a)(y-b)] \cdot H(f)(a,b) \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

P_2 är kontrollerad av $H(f)$. Förra gången talade vi om pos.def, neg.def, indefinita, matriser eller kvadratiska ytor.

Kvadratisk form: $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ Om $f(x,y) > 0$ för $(x,y) \neq 0 \Rightarrow P_2(x,y) = f(a,b) + \overset{\text{Plus ngt} > 0}{*} > 0$ om $(x,y) \neq (a,b)$

i det här fallet är (a,b) lokalt min

$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$

dela med y^2 (som är >0)

$f(x,y) = A\frac{x^2}{y^2} + 2B\frac{x}{y} + C$

sätt $\frac{x}{y} = t$

$f(t) = At^2 + 2Bt + C$

- Hitta minpunkter för att se om $f > || < 0$
- $f(t)$ har inga reella nollställen om alltid pos eller alltid negativ $\Rightarrow$ leta nollställen

$f(t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{2A} \Rightarrow$ Om $B^2 - AC < 0$ existerar inga nollställen.

$B^2 - AC < 0$ & $A > 0 \Rightarrow F(t)$ alltid pos

$B^2 - AC < 0$ & $A < 0 \Rightarrow F(t)$ alltid neg

Om $B^2 - AC > 0 \Rightarrow$ $F(t)$ ibland pos ibland neg

$B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ Vi vet inget

Översättning till kritiska punkter $A = f_{11}(a,b)$, $B = f_{12}(a,b)$ $C = f_{22}(a,b)$.

$B^2 - AC < 0$	$A > 0$	lokalt min
$B^2 - AC < 0$	$A < 0$	lokalt max
$B^2 - AC > 0$		Sadelpunkt (riktig)
$B^2 - AC = 0$		ingen info

Notera: $B^2 - AC = -\det(H(f))$

Ex Bestäm och klassificera kritiska punkter till $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

Kr. Pkt: $\nabla f(x,y)=0$

$\nabla f(x,y)=(3x^2-3y,3y^2-3x)=(0,0) \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y=x^2 \\ x=y^2 \end{matrix}\right\} y=x^2=(y^2)^2=y^4 \Rightarrow y^4=y \Rightarrow y(y^3-1)=0 \Rightarrow \begin{matrix} y_1=0, & y_2=1 \\ x_1=0, & x_2=1 \end{matrix}$

Kr. Pktr

Hitta partiella derivator! Klassificera. $P_1=(0,0)$ $P_2=(1,1)$

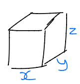
$Hess(f)=\begin{array}{cc} A & B \\ \end{array}\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}\begin{array}{cc} B & C \end{array}$ om $P_1=(0,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A=0, B=-3, C=0 \Rightarrow B^2-AC=9>0$

P_1 är alltså en sadelpunkt.

$Hess(f)$ om $P_2=(1,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A=6, B=-3, C=6 \Rightarrow B^2-AC=-27<0 \Rightarrow P_2$ är lokalt min.

Dugga 26/9, V&V, $8^{30}-11^{30}$ Inkluderar allt till och med Lagranges metod (13.3).

Ex Bestäm största och minsta area till en box med given volym 5ve.



$V=x \cdot y \cdot z=5$

$A=2xz+2yz+2xy$

Om vi trycker ihop lådan $\Rightarrow$ oändlig area...

Volymformeln $\Rightarrow z=\frac{5}{xy}$

Arean $=f(x,y)=2x\left(\frac{5}{xy}\right)+2y\left(\frac{5}{xy}\right)+2xy=\frac{10}{y}+\frac{10}{x}+2xy$

$f(x,y)=\frac{10}{y}+\frac{10}{x}+2xy$

Minimum ges av en kritisk punkt.

$\nabla f=\left(\frac{-10}{x^2}+2y, \frac{-10}{y^2}+2x\right)=(0,0) \Rightarrow \begin{matrix} y=\frac{5}{x^2} \\ x=\frac{5}{y^2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y=\frac{5}{\left(\frac{5}{y^2}\right)^2}=\frac{y^4}{5} \\ x=\frac{x^4}{5} \end{matrix} \Rightarrow \cancel{x_1=0}$ men $x_1>0$

$x_2^3=5 \Rightarrow x_2=\sqrt[3]{5}$

$y_2=\sqrt[3]{5}$

$z=\frac{5}{xy}=\sqrt[3]{5}$

13.2 | Extremproblem med Bi-villkor

Ofta behöver man lägga till bivillkor. Hur max/minimerar vi en funktion $f(x,y)$ över ett område U definierat via $g(x,y)=C$

$g(x,y)\geq C$

$g(x,y)\leq C$

Sats

Om f har lokalt min/max i (a,b) gäller i) $\nabla f(a,b)=0$

ii) $(a,b)=$ randpunkt

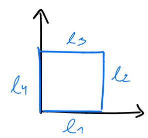
iii) ∇f odef

Ex Hitta max/min till $f(x,y)=x^2+y^2$ på kvadraten med hörn $(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)$

$\nabla f=(2x,2y)=(0,0) \rightsquigarrow x=y=0$ motsvarar en kritisk punkt.

Spara $f(0,0)=0$

Måste kolla värden på randen till kvadraten. Detta genom att parametrisera kvadraten.



Finns 4 sidor som behöver fixas....

ℓ_3 kan parametriseras gm $\ell_3(t)=(t,1)$

För att kolla värden till $f(x,y)$ sätt in ℓ_3. $g(t)=f(\ell_3(t))=t^2+1^2$ Kolla kritiska punkter och randen.

$g'(t)=2t \Rightarrow t=0$ motsvarar $(0,1)$. Värde: Sparar $f(0,1)=1$

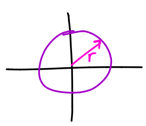
Randerna: $(0,0)$ & $(1,1)$ Spara också $f(1,1)=2$

Övriga linjer lämnas till läsaren att visa.

I slutänden har vi sparat massor med tal. Hittills har vi: $f(0,0)=0$, $f(0,1)=1$, $f(1,1)=2$, ⋮

min ges av minsta värdet
max ges av största

Ex Hitta max/min till $f(x,y)=ax+by$ på disken av radie r: $x^2+y^2\leq r$



Kritiska punkter: $\nabla f=(a,b)$

Om $(a,b)\neq(0,0)$ finns ingen kritisk punkt

Alltså ligger max eller min på randen: $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow$ $x=r\cos t$, $y=r\sin t$

$f(x,y)=f(x,y \text{ på randen})(t)=a\cdot r\cdot\cos t+b\cdot r\cdot\sin t$

$g(t)=ar\cos t+br\sin t$

$g'(t)=-ar\sin t+br\cos t=0$

$-ar\sin t+br\cos t=0$

$(a,b)\cdot(-\sin t,\cos t)=0 \Leftrightarrow$ vinkelräta

En annan vinkelrät vektor till (a,b) är $(-b,a)$ det innebär att: $(-\sin t,\cos t)=\lambda(-b,a)$

$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ eftersom VL har längd 1

Sammansättning av detta ger att $|(a,b)\cdot(x,y)|\leq\|(a,b)\|\cdot\|(x,y)\|$

Cauchy-Schwartz olikhet

13.2 Ext-värdesproblem med bi-/randvillkor

Hitta max och min till $f(x,y) = ax + by$ på disken $x^2+y^2 \leq r^2$ $(a,b) \neq (0,0)$

$\nabla f = (a,b) \neq (0,0) \Rightarrow$ <u>max</u> & <u>min</u> är en randpunkt & finns eftersom disken är kompakt.

Parametrisera randen $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{array}\right\} g(t) = f(r\cos t, r\sin t) = ar\cos t + br\sin t$

$g'(t) = ar(-\sin t) + br\cos t = 0$

annan vektor ortogonal till (a,b)

$= (-r\sin t, r\cos t)\cdot(a,b) = 0 \Rightarrow (a,b) \perp (-r\sin t, r\cos t) \Rightarrow (-r\sin t, r\cos t) = \lambda(-b,a)$

Vad är λ?

Kan abs-belopp/norm på båda sidorna: $\big(\underbrace{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}_{=r}\big)^{1/2} = |\lambda| \cdot \big((-b)^2 + (a)^2\big)^{1/2} \Rightarrow |\lambda| = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}} \Rightarrow$

$\lambda_{\pm} = \pm \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}$

$(-r\sin t, r\cos t) = \lambda_{\pm}(-b,a) \Rightarrow$ plusfallet: $-r\sin t = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}} \cdot (-b)$

$x = r\cos t = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}} a$

$y = r\sin t = \frac{r}{(a+b)^2} b$

maxpunkt

m.a.o: $(x,y) = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}(a,b)$

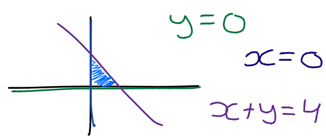
Minusfallet: $\lambda_- = \frac{-r}{(a^2+b^2)^{1/2}} \Rightarrow$ min: $(x,y) = \frac{-r}{(a^2+b^2)^{1/2}}(a,b)$

Slutsats: $-r(a^2+b^2)^{1/2} \leq ax + by \leq \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}(a,b)\cdot(a,b) = r(a^2+b^2)^{1/2}$

Kallas: Cauchy-Schwarz olikhet $|(a,b)\cdot(x,y)| \leq \|(a,b)\| \cdot \|(x,y)\| \leq \|(a,b)\| \cdot r$

<u>Ex</u> Hitta max/min till $f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$ på området begränsat av $x=0, y=0, x+y=4$.

3 linjer



Vi vet att området är kompakt $\Rightarrow$ max/min finns.
Kolla kandidater på randen och i det inre.

$\nabla f = (f_1, f_2) = (0,0)$ $\qquad e^{-(x+y)} \neq 0$

$f_1 = (xy(2-x)\cancel{e^{-(x+y)}}) = 0$

$f_2 = x^2(1-y)\cancel{e^{-(x+y)}} = 0$

$xy(2-x) = 0$ $\qquad$ Alt 1: $x=2, y=1$

$x^2(1-y) = 0$ $\qquad$ Alt 2: $x=0$, y = valfritt $\quad$ på randen

Bokför $(2,1) \Rightarrow f(2,1) = 4e^{-3}$

Kolla ränder: $x=0$ rand1 $\quad f(0,y)=0$
$y=0$ rand2 $\Rightarrow f(x,0)=0$ $\Big\}$ Bokför 0.
<u>$x+y=4$ rand3</u>

Testa rand3 genom att sätta in $y = 4-x$ & $x \geq 0, y \geq 0$

Insättning: $f(x,y) = x^2(4-x)e^{-4} = g(x)$

Kolla <u>rand</u> och leta $g'(x) = 0$. $\qquad g'(x) = (8x - 3x^2)e^{-4} = 0 \Rightarrow x=0$ eller $x = \frac{8}{3}$

ingen nytt

$x = \frac{8}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}$: $(8/3, 4/3)$

Potentiellt max/min: $f(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{256}{27} e^{-4}$

Sparat i Bank: $0, \frac{256}{27}e^{-4}, 4e^{-3}$

0 är min. $4e^{-3}$ är max genom uppskattning.

13.3| Lagranges Metod

Frågeställning: Hur maximerar/minimerar jag en $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ på ett område bestämt av
$g(x,y)=0$
$\quad = C$ (nivåyta)

Tänk att vi parametriserar nivåkurvan $g(x,y)=C$ med hjälp av $x=x(t)$, $y=y(t)$. Vill max/minimera
$h(t) = f(x,y) = f(x(t), y(t))$

Hitta kritiska punkter till $h(t)$. $\quad h'(t) = \frac{d}{dt}(h(t)) = \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \{\text{Kedje}\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} =$
$\nabla f \cdot (x', y') = 0$

∇f ortogonal till (x', y') — tangentvektor till nivåytan $g(x,y)=C$

Normalen till tangentlinjen är också ortogonal till (x', y'). $\nabla g(x,y)$ i (a,b) är normal till tangentlinjen till nivåkurvan $g(x,y) = g(a,b) = C$.

$\nabla f(a,b) = \lambda_0 \nabla g(a,b)$ om (a,b) motsvarar en kritiskpunkt till $h(t)$.
Detta gäller om $(x', y') \neq 0 \iff \nabla g \neq 0$

Sats

Antag att $f(x,y)$ har lokalt max/min på $g(x,y)=C$ i punkten (a,b) och att (a,b) ej är en ändpunkt, $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$. Då finns λ_0 så (a,b,λ_0) är en kritisk punkt till funktionen
$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

Om (a,b,λ) kritisk pkt till C: $\nabla L = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = (0,0,0)$
$\left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}\right) = (0,0) \iff \nabla f + \lambda \nabla g = 0$
$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \iff g = 0$

Ex Hitta kortaste avståndet mellan origo och kurvan som ges av $x^4 y = 16$.
Lagranges metod: Avståndet mellan en punkt (x,y) på $x^4y=16$ och origo: $f = (x^2+y^2)^{1/2}$
Bivillkor: $g(x,y) = x^4 y = 16$
Skriv om: $g(x,y) = x^4 y - 16 = 0$

Vi söker kr.pkt till $L(x,y,\lambda) = (x^2+y^2)^{1/2} + \lambda(x^4y-16)$

Trick: Om $(x^2+y^2)^{1/2}$ minst på en mängd D $\iff$ x^2+y^2 minst på en mängd D.
Istället: $L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x^4y-16)$

Kr.Pkt: $\nabla L = (0,0,0)$
$\iff$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda 4x^3 y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda x^4 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^4 - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -\frac{2x}{4x^3y} = \frac{-1}{2x^2y} \\ \lambda = -\frac{2y}{x^4} \end{array}$$

Här använder jag att $x \neq 0$ eftersom ekv 3 kräver det, så byt ut $\sqrt{x^2+y^2}$ mot x^2+y^2 i Lagranges.

$\frac{-1}{2x^2y} = \frac{-2y}{x^4} \iff x^2 = 4y^2 \Rightarrow x = \pm 2y$

Insättning i ekv 3 $\Rightarrow x^4y = 16$, $x = \pm 2y \Rightarrow 2^4y^5 = 16 \Rightarrow y^5 = 1 \Rightarrow y = 1$

Lagrange föreslår: $(-2,1)$ eller $(2,1)$ är max/min till avståndet i origo. Det måste också vara min, som då ges av: $\sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$