

Uppgift 11.3.16. Beskriv kurvan $\mathcal{C}$ som ges av

$$x = a \cos t \sin t, \quad y = a \sin^2 t, \quad z = bt.$$

Beräkna längden av $\mathcal{C}$ mellan $t = 0$ och $t = T > 0$.

Lösning. Låt oss bestämma först hur ser kurvan ut via projektion till xy -planet. Vi har

$$x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = ay,$$

och efter kvadratkomplettering

$$x^2 + (y - a/2)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Det är en cirkel med radie $a/2$ och mittpunkten i $x = 0, y = a/2$. I z -riktningen går kurvan med konstant fart b , så ser den ut som en spiral.

Längden räknas av

$$\begin{aligned} L &= \int_0^T |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^T \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ &= \int_0^T \sqrt{a^2(\cos^2 t - \sin^2 t)^2 + a^2(2 \sin t \cos t)^2 + b^2} dt \\ &= \int_0^T \sqrt{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} T. \end{aligned}$$

Uppgift 12.1.6. Identifiera definitionsmängden av

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Lösning. Funktionen är definierad om och endast om $x^2 - y^2 > 0$, eller $|x| > |y|$. Denna ojämlikhet definerar regionen mellan linjerna $x = y$ och $x = -y$ som innehåller x -axeln (och linjerna tillhör inte till regionen, så regionen är öppen).

Uppgift 12.1.30. Beskriv grafen av $f(x, y)$ med nivåkurvorna på Fig 12.12 b) i Adams. Antag att nivåkurvorna är uppritade för jämfördelade värden av C .

Lösning. Nivåkurvorna visar att $f(x, y)$ beror bara på y , för att nivåkurvorna är horisontella linjer. Så man kan skriva $f(x, y) = g(y)$ när g är någon envariabel-funktion beroende av y . Bilden visar att $g(-5) = 0, g(0) \approx 7, g(5) = 10$. Densiteten av nivåkurvorna visar att $g(x)$ ökar snabbt när $-5 \leq x \leq -2.5$ men sen går den upp mer och mer långsamt. Grafen av $f(x, y)$ ser ut som grafen av $g(y)$ kopierad för varje x -värde. Man kan ta t.ex. $f(x, y) = \sqrt{10y + 50}$ som är konsistent med alla observationer ovan.

Uppgift 12.2.14. Hur kan funktionen

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

definieras längs linjen $x = y$ så att resulterande funktionen är kontinuerliga i hela xy -planet?

Lösning. Definiera

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

Det är klart att g är definierad i hela xy -planet och är kontinuerliga. Å andra sidan, $g(x, y) = f(x, y)$ om (x, y) tillhör till definitionsmängden av f , dvs när $x \neq y$. Men det exakt menar att g är en kontinuerlig förlängning av f . Därför kan man definiera $f(x, y) = g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ också när $x = y$, så blir f kontinuerliga i hela xy -planet.