Uppgift 12.3.8. Beräkna de första partiella derivatorna och utvärdera dem i den givna punkten.

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (-3,4).$$

Lösning. Vi får

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}(x^2)_x = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ f_2(x,y) &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}(y^2)_y = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} f_1(-3,4) &= -\frac{-3}{(9+16)^{3/2}} = 3/125 \\ f_2(-3,4) &= -\frac{4}{(9+16)^{3/2}} = -4/125 \end{aligned}$$

Uppgift 12.4.6. Beräkna de partiella andraderivatorna av funktionen

$$f(x,y) = \log(1+\sin(xy)).$$

Lösning. Förstaderivatorna ges av

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{y\cos(xy)}{1+\sin(xy)} \\ f_2(x,y) &= \frac{x\cos(xy)}{1+\sin(xy)}. \end{aligned}$$

Andraderivatorna ges av

$$\begin{aligned}
f_{11}(x,y) &= \frac{(y\cos(xy))_x(1+\sin(xy)) - y\cos(xy)(1+\sin(xy))_x}{(1+\sin(xy))^2} \\
&= \frac{-y^2\sin(xy)(1+\sin(xy)) - y^2\cos(xy)^2}{(1+\sin(xy))^2} \\
&= \frac{-y^2 - y^2\sin(xy)}{(1+\sin(xy))^2} = -\frac{y^2}{1+\sin(xy)}. \\
f_{22}(x,y) &= \frac{(x\cos(xy))_y(1+\sin(xy)) - x\cos(xy)(1+\sin(xy))_y}{(1+\sin(xy))^2} \\
&= \frac{-x^2\sin(xy)(1+\sin(xy)) - x^2\cos(xy)^2}{(1+\sin(xy))^2} \\
&= \frac{-x^2 - x^2\sin(xy)}{(1+\sin(xy))^2} = -\frac{x^2}{1+\sin(xy)}. \\
f_{21}(x,y) &= f_{12}(xy) = \frac{(y\cos(xy))_y(1+\sin(xy)) - y\cos(xy)(1+\sin(xy))_y}{(1+\sin(xy))^2} \\
&= \frac{(\cos(xy) - xy\sin(xy))(1+\sin(xy)) - xy\cos^2(xy)}{(1+\sin(xy))^2} \\
&= \frac{-xy(\sin^2(xy)+\cos^2(xy)) + \cos(xy)(1+\sin(xy)) - xy\sin(xy)}{(1+\sin(xy))^2} \\
&= \frac{-xy(1+\sin(xy)) + \cos(xy)(1+\sin(xy))}{(1+\sin(xy))^2} = \frac{\cos(xy) - xy}{1+\sin(xy)}.
\end{aligned}$$

Uppgift 12.5.10. Hitta derivaten. Antag att f har kontinuerliga partiella förstaderivator.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(2y, 3x)$$

Lösning. Enligt kjederegeln har vi

$$\frac{\partial}{\partial x} f(2y,3x) = f_1(2y,3x)(2y)_x + f_2(2y,3x)(3x)_x = 3f_2(2y,3x).$$

Uppgift 12.6.4. Använda lämplig linearisering för att approximera funktionsvärdet i den givna punkten.

$$f(x,y) = \frac{24}{x^2+xy+y^2} \text{ vid } (2.1, 1.8)$$

Lösning. Vi skriver

$$f(2.1, 1.8) = f(2 + 0.1, 2 - 0.2) \approx f(2, 2) + 0.1f_1(2, 2) - 0.2f_2(2, 2).$$

Försra derivatorna beräknas till

$$f_1(x, y) = -\frac{24(2x + y)}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$
$$f_2(x, y) = -\frac{24(2y + x)}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

så

$$f_1(2, 2) = f_2(2, 2) = -\frac{24 \cdot 6}{12^2} = -1$$

och

$$f(2, 2) = \frac{24}{12} = 2.$$

När vi sätter in värdena får vi

$$f(2.1, 1.8) \approx 2 + 0.1 \cdot (-1) - 0.2 \cdot (-1) = 2.1.$$