Uppgift 12.7.6. Låt

$$f(x,y) = \sqrt{1+xy^2} \text{ i } (2,-2)$$

Beräkna

a) Gradienten av funktionen f i den givna punkten,
b) Ekvationen av tangentplanet av grafen av $f(x,y)$ i den givna punkten,
c) Ekvationen av den linjen som är tangenten till nivåkurvan av funktionen f i den givna punkten.

Lösning.

a) Vi får

$$\nabla f = \frac{y^2}{2\sqrt{1+xy^2}}\mathbf{i} + \frac{yx}{\sqrt{1+xy^2}}\mathbf{j},$$

så

$$\nabla f(2,-2) = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{4}{3}\mathbf{j}.$$

b) Grafen av f är den nollnivåytan av trevariabelfunktionen $g(x,y,z) = f(x,y) - z$, dvs grafen av f beskrivs av $g(x,y,z) = 0$. Tangentplanet till denna yta är ortogonalla mot tredimentionella gradientvektorn av $g(x,y,z)$ i punkten $(2,-2,f(2,-2))$, så besvkrivs det av (se Adams, s. 724 ex. 7)

$$z = f(2,-2) + f_1(2,-2)(x-2) + f_2(2,-2)(y-(-2)),$$

eller

$$z = 3 + \frac{2}{3}(x-2) - \frac{4}{3}(y+2),$$

eller

$$2x - 4y - 3z = 3.$$

c) Nivåkurvan beskrivs av

$$\sqrt{1+xy^2} = f(2,-2) = 3.$$

Tangenten i $f(2,-2)$ är ortogonalla mot gradienten av $f(x,y)$ i $(2,-2)$, dvs mot vektorn $f_1(2,-2)\mathbf{i} + f_2(2,-2)\mathbf{j}$. Så beskrivs den av

$$f_1(2,-2)(x-2) + f_2(2,-2)(y-(-2)) = 0,$$

eller

$$\frac{2}{3}(x-2) - \frac{4}{3}(y+2) = 0,$$

eller

$$x - 2y = 6.$$

Uppgift 12.7.16. Visa att i polära koordinater (r, θ) (när $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$), ges gradienten av $f(r, \theta)$ av

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{\theta}.$$

Här $\mathbf{r}$ är en enhetvektor i riktingen av positionvectorn $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ och $\boldsymbol{\theta}$ är en enhetvektor som är vinkelrät mot $\mathbf{r}$ i riktningen när θ ökar.

Lösning. För de polära enhetvektorerna får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} \\ \boldsymbol{\theta} &= -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} \end{aligned}$$

Enligt kjederegeln har vi också

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

När vi sätta in värdena för $\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$, får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{\theta} &= (\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y})(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \\ &+ \frac{1}{r}(-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y})(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}) \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = \nabla f. \end{aligned}$$