Uppgift 12.9.4. Hitta taylorutveklingen av
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^3$$
i punkten $(1,-1)$.

Lösning. Taylorutveklingen i en punkt (x_0, y_0) ger den bästa approxinationen av f med en polynom i närheten av (x_0, y_0). Med andra ord, om man skriver
$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + a_{1,1}(x-x_0) + a_{1,2}(y-y_0) \\ &+ a_{2,1}(x-x_0)^2 + a_{2,2}(x-x_0)(y-y_0) + a_{2,3}(y-y_0)^2 + \text{ termer av ordning 3 }. \end{aligned}$$
ger taylorutveklingen formlerna för att beräkna koefficienterna $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}$ som passar bäst.

I detta fall är f redan en polynom, så man kan skriva ut koefficienterna utan direkt användning av taylorformelna. Vi har $x_0 = 1, y_0 = -1$ så polynomen ska se ut som
$$\begin{aligned} f(x_0,y_0) &+ a_{1,1}(x-1) + a_{1,2}(y+1) \\ &+ a_{2,1}(x-1)^2 + a_{2,2}(x-1)(y+1) + a_{2,3}(y+1)^2 + \text{ termer av ordning 3 }. \end{aligned}$$
Vi får
$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + xy + y^3 = (x-1+1)^2 + (x-1+1)(y+1-1) + (y+1-1)^3 \\ &= (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 + (x-1)(y+1) - (x-1) \\ &+ (y-1) - 1 + (y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 3(y+1) - 1 \\ &= -1 + (x-1) + 4(y+1) + (x-1)^2 + (x-1)(y+1) - 3(y+1)^2 + (y+1)^3. \end{aligned}$$
Det betyder att $a_{1,1} = 1, a_{1,2} = 4, a_{2,1} = 1, a_{2,2} = 1, a_{2,3} = -3$ och $(y+1)^3$ är en term av ordning 3.

Uppgift 12.9.12. Hitta taylorutveklingen av ordningen 2 av
$$f(x,y) = \frac{1+x}{1+x^2+y^4}$$
i närheten av $(0,0)$

Lösning. Från envariabelanalys kursen vet vi Maclaurinutvecklingen
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + O(z^2)$$
i närheten av $z = 0$. Här betyder $O(z^2)$ termerna av ordning två eller högre. Observera att om vi sätta in $z = -(x^2 + y^4)$ med (x,y) i närheten av $(0,0)$, blir z i närheten av 0, så
$$\frac{1}{1+x^2+y^4} = 1 - (x^2+y^4) + O((x^2+y^4)^2).$$

och

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1+x^2+y^4} &= (1+x)(1-(x^2+y^4)+O((x^2+y^4)^2) \\ &= 1+x-x^2-x^3+y^4+y^4x+O((x^2+y^4)^2).\end{aligned}$$

Vi ska ta bort alla termerna av ording högre en två, dvs, $x^3, y^4, y^4x, O((x^2+y^4)^2)$, så ges taylorpolynomen av ordining två av

$$1+x-x^2.$$

Uppgift 13.1.14. Hitta och klassificiera de alla kritiska punkterna av

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x+y+x^2+y^2}.$$

i närheten av $(0,0)$

Lösning. En punkt (x,y) är kritisk om och endast om $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$. Vi får

$$\mathbf{0} = \nabla f(x,y) = -\frac{-1+2x}{(1-x+y+x^2+y^2)^2}\mathbf{i} - \frac{1+2y}{(1-x+y+x^2+y^2)^2}\mathbf{j},$$

så $(1/2,-1/2)$ är den enda kritiska punkten.

Nu ska vi bestämma om $(1/2,-1/2)$ är en min-, max, sadelpunkt eller ingen av dessa. Vanligtvis ska man använda testet på s. 750 i Adams, dvs räkna

$$A = f_{11}(x,y),\ B = f_{12}(x,y) = f_{21}(x,y) \ \text{ och } C = f_{22}(x,y)$$

och sen kolla tecken av $B^2 - AC$. Men i det aktuella fallet har vi

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-1/2)^2+(y+1/2)^2+1/2},$$

så tydligen är $(1/2,-1/2)$ en maxpunkt för att $f(x,y) \le f(1/2,-1/2) = 2$ för alla x, y.