

Uppgift 10.1.14. Skissa mängden i $\mathbb{R}^3$ som beskrivs av

$$z = x.$$

Lösning. Alla punkterna ser ut som (x, y, x) . Det är kopior av linjen $z = x$ i xz planet translaterat vid vektorn $(0, y, 0)$. Dvs det är ett plan som innehåller y -axeln och linjen $x = z$ i xz -planet.

Uppgift 10.5.4. Identifiera ytan beskrivs av

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4x - 8y = 8.$$

Lösning. Vi ska transformera yt-ekvationen så att den matchar en av de kanoniska kvadratiske ytor. Först, skriver vi

$$(x + 2)^2 + (2y - 2)^2 + (3z)^2 = 16.$$

Om vi translaterar den med vektorn $(2, -1, 0)$ blir de nya koordinaterna

$$x' = x + 2, \quad y' = y - 1, \quad z' = z$$

så

$$x'^2 + (2y')^2 + (3z')^2 = 16,$$

eller

$$\frac{x'^2}{4^2} + \frac{y'^2}{2^2} + \frac{z'^2}{(4/3)^2} = 1.$$

Det är en ellipsoid med semiaxlarna 4, 2 och 4/3 (med mittpunkten i origo). Den ursprungliga ytan är translaterat utifrån med $-(2, -1, 0)$, dvs den är en ellipsoid med semiaxlarna 4, 2 och 4/3 med mittpunkten i $(-2, 1, 0)$.

Uppgift 10.5.20. Skissa det geometriska objekt som beskrivs av

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 3z^2 &= 6 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Lösning. När vi sätter $y = 1$ i första ekvationen, blir det

$$x^2 + 3z^2 = 4,$$

eller

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{z^2}{(2/\sqrt{3})^2} = 1.$$

Det är en ellips i xz -planet med semiaxlarna 2 och $2/\sqrt{3}$, med mittpunkten i $x = 0, z = 0$. Så skärningskurvan är en ellips med semiaxlarna 2 och $2/\sqrt{3}$ som ligger i vertikala planet $y = 1$ med mittpunkten i $(0, 1, 0)$.

Uppgift 11.1.12. Beräkna hastigheten, farten och accelerationen i tid t av en partikel vars position $\mathbf{r}(t)$ och beskriv partikelbanan.

$$\mathbf{r}(t) = at \cos(\omega t) \mathbf{i} + at \sin(\omega t) \mathbf{j} + b \log t \mathbf{k}.$$

Lösning. Hastigheten är

$$\mathbf{r}'(t) = a[\cos(\omega t) - t\omega \sin(\omega t)] \mathbf{i} + a[\sin(\omega t) + t\omega \cos(\omega t)] \mathbf{j} + (b/t) \mathbf{k}.$$

och accelerationen är

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''(t) &= a[-2\omega \sin(\omega t) - t\omega^2 \cos(\omega t)] \mathbf{i} \\ &+ a[2\omega \cos(\omega t) - t\omega^2 \sin(\omega t)] \mathbf{j} - b/t^2 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Farten är längden av hastighetsvektorn, dvs

$$\begin{aligned} v^2 = |\mathbf{r}'(t)|^2 &= a^2[\cos^2(\omega t) + t^2\omega^2 \sin^2(\omega t) - 2t\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t)] \\ &+ a^2[\sin^2(\omega t) + t^2\omega^2 \cos^2(\omega t) + 2t\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t)] + b^2/t^2 \\ &= a^2[1 + t^2\omega^2] + b^2/t^2, \end{aligned}$$

så

$$v(t) = \sqrt{a^2[1 + t^2\omega^2] + b^2/t^2}.$$

Via projektion till xy -planet, ser ut banan som en cirkel med radie lika med at , därför är partikelbanan en spiral, med vertikala farten b/t . Låt

$$x(t) = at \cos(\omega t), \quad y(t) = at \sin(\omega t), \quad z(t) = b \log t,$$

så att kurvan $(x(t), y(t), z(t))$ beskriver partikelbanan. Observera att

$$x^2(t) + y^2(t) = a^2 t^2 = \exp(2z/b) a^2,$$

så att banan ligger på ytan

$$x^2 + y^2 = \exp(2z/b) a^2.$$