Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys

2015-01-02 kl. 8.30–12.30

Examinator: Dennis Eriksson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Gustav Kettil, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng från kryssuppgifterna.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidor 5-6

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se sidor 7-9

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Planet $x + y + z = 12$ skär paraboloiden $z = x^2 + y^2$ i en ... (fyll i ordet !). Bestäm de punkter på skärningskurvan som ligger närmast respektivt längst ifrån origo. (5p)

Lösning: Skärningen ges av $x + y + (x^2 + y^2) = 12$ som efter kvadratkomplettering lyder $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$. Detta är en *cirkel* av radie $5/\sqrt{2}$ och centrum i $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
Vi vill minimera funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ under bivillkoren

$$g(x, y, z) = x + y + z - 12 = 0, \tag{1}$$
$$h(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0. \tag{2}$$

Lagranges metod innebär att vid extrempunkterna finns det konstanter λ, μ sådan att

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x \Rightarrow 2x = \lambda - 2x\mu, \tag{3}$$
$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y \Rightarrow 2y = \lambda - 2y\mu, \tag{4}$$
$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z \Rightarrow 2z = \lambda + \mu. \tag{5}$$

Från (3) och (4) härleds att $\lambda = 2x(1 + \mu) = 2y(1 + \mu)$, som lämnar två möjligheter:

Fall 1: $\mu = -1$ och $\lambda = 0$.

Insättning i (5) ger $z = -1/2$, som motsäger (2), ty den senare tvingar z att vara icke-negativt.

Fall 2: $x = y$.

Insättning i (1) ger $z = 12 - 2x$ medan att insättning i (2) ger $z = 2x^2$. Således måste

$$12 - 2x = 2x^2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ eller } x = -2.$$

Om $x = -3$ så är $y = x = -3$ och $z = 2x^2 = 18$, dvs punkten är $(-3, -3, 18)$. Om $x = 2$ så är $y = x = 2$ och $z = 2x^2 = 8$, dvs punkten $(2, 2, 8)$. Slutligen har vi

$$f(-3, -3, 18) = (-3)^2 + (-3)^2 + 18^2 = 342, \quad f(2, 2, 8) = 2^2 + 2^2 + 8^2 = 72.$$

Så 342 måste vara det största avståndet från origo på cirkeln och 72 det minsta.

7. (a) Bestäm volymen av det område som ligger innanför både $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ och $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (4p)

(b) Använd Stokes sats för att beräkna $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (x^2 + 3y, \cos y^2, z^3)$ och $\mathcal{C}$ är skärningskurvan mellan ytorna $z = 4 - x^2 - y^2$ och $x^2 + z^2 = 1$ med $y > 0$, orienterad medurs sett från långt ut på den positiva y-axeln. (5p)

Lösning (a): Det är inte nödvändigt, men vill man se hur området ser ut kan man observera att

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z \Rightarrow x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,$$

så detta är en sfär av radie 1 och mittpunkt i $(0, 0, 1)$. Området skärs ut av denna sfär och 45-graders halvkonen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Det är enklast att beskriva området i sfäriska koordinater. Man ser direkt att

$$0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le \phi \le \pi/4.$$

När det gäller ρ är det enklast att skriva den givna ekvationen för sfären direkt i sfäriska koordinater. På så sätt får vi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z \Rightarrow \rho^2 = 2\rho\cos\phi \Rightarrow \rho = 2\cos\phi.$$

Så för ett givet ϕ går ρ från noll upp till $2\cos\phi$. Volymen av området är således

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin\phi \, d\phi \left(\int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \, d\rho \right) = \frac{16\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3\phi \sin\phi \, d\phi.$$

Integralen beräknas m.h.a. substitutionen $u = \cos\phi$ och blir

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} u^3 \, du = \cdots = \frac{3}{16}.$$

Volymen är alltså $\left(\frac{16\pi}{3}\right)\left(\frac{3}{16}\right) = \pi$.

(b): Stokes sats medför att

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS, \tag{6}$$

där $\mathcal{S}$ är den del av upp-och-ner paraboloiden $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ som ligger över, och därmed begränsas av, den del av skärningskurvan med cylindern $x^2 + z^2 = 1$ som tillhör $y > 0$. Först har vi

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + 3y & \cos y^2 & z^3 \end{vmatrix} = \cdots = -3\mathbf{k}. \tag{7}$$

Näst har vi

$$\hat{\mathbf{N}}\,dS = \pm(f_x,\, f_y,\, -1)\,dx\,dy = \pm(-2x,\, -2y,\, -1)\,dx\,dy. \tag{8}$$

Eftersom vi går medurs längs $\mathcal{C}$ sett högerifrån så kommer paraboloiden att ligger till höger om färdriktningen, så $\hat{\mathbf{N}}$ ska peka in i paraboloiden och därmed neråt. Därför väljer vi plus tecknet i (8). Från (7) och (8) härleder vi sedan att

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} = (0,\, 0,\, -3) \cdot (-2x,\, -2y,\, -1) = 3.$$

Insättning i (6) ger att

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\pi(\mathcal{S})} 3\,dx\,dy = 3 \times \text{Area}(\pi(S)), \tag{9}$$

där $\pi(\mathcal{S})$ är projektionen av $\mathcal{S}$ på xy-planet. Att ta reda på projektionen är lite klurigt. Först, eftersom skärningskurvan tillhör $x^2 + z^2 = 1$ så är $-1 \le z \le 1$. Sedan på paraboloiden har vi $x^2 + y^2 = 4 - z$, så om $z \in [-1,\, 1]$ så kommer $x^2 + y^2 \in [3,\, 5]$. Dessutom är $y > 0$. Det hela innebär att $\pi(S)$ är den övre halvan av annulus:en $3 \le x^2 + y^2 \le 5$, så

$$\text{Area}(S) = \frac{1}{2}\left(\pi \cdot (\sqrt{5})^2 - \pi \cdot (\sqrt{3})^2\right) = \pi.$$

Insättning i (9) ger svaret 3π.

8. Visa att om $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ är virvelfria vektorfält från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$, då är fältet $\mathbf{H} = \mathbf{F} \times \mathbf{G}$ källfritt. (4p)

Lösning: Skriv

$$\mathbf{F} = (F_1,\, F_2,\, F_3), \quad \mathbf{G} = (G_1,\, G_2,\, G_3), \quad \mathbf{H} = (H_1,\, H_2,\, H_3).$$

$\mathbf{F}$ är virvelfritt så $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, som motsvarar de tre ekvationerna

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}. \tag{10}$$

På samma sätt för $\mathbf{G}$ har vi

$$\frac{\partial G_2}{\partial z} = \frac{\partial G_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial G_3}{\partial x} = \frac{\partial G_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x}. \tag{11}$$

Efterom $\mathbf{H} = \mathbf{F} \times \mathbf{G}$ så gäller

$$H_1 = F_2G_3 - F_3G_2, \quad H_2 = F_3G_1 - F_1G_3, \quad H_3 = F_1G_2 - F_2G_1. \tag{12}$$

Per definition, $\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z}$. Från (12) och produktregeln får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial x} &= \left(F_2\frac{\partial G_3}{\partial x} + G_3\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) - \left(F_3\frac{\partial G_2}{\partial x} + G_2\frac{\partial F_3}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial H_2}{\partial y} &= \left(F_3\frac{\partial G_1}{\partial y} + G_1\frac{\partial F_3}{\partial y}\right) - \left(F_1\frac{\partial G_3}{\partial y} + G_3\frac{\partial F_1}{\partial y}\right), \\
\frac{\partial H_3}{\partial z} &= \left(F_1\frac{\partial G_2}{\partial z} + G_2\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) - \left(F_2\frac{\partial G_1}{\partial z} + G_1\frac{\partial F_2}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Efter omgruppering av termerna får vi sedan

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{H} = F_1\left(\frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial y}\right) + F_2\left(\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial z}\right) + F_3\left(\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial x}\right) + \\
+ G_1\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + G_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + G_3\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Från (10) och (11) ser vi att var och en av de sex termerna inom parantes är noll, som slutför beviset.

Anmärkning: Det vi har faktiskt visat med (13) är ekvationen

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}).$$

Formelblad för TMA043 och MVE085, 14/15

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2015-01-02	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt $f(x, y, z) = 3x^2 - y^2 + 4z^2$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 6$ i punkten $(1, 1, 1)$. Bestäm även riktningsderivatan till f i denna punkt i riktningen $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$. (3p)

Lösning: Tangentplanets ekvation i punkten (x_0, y_0, z_0) lyder

$$\nabla f \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0. \tag{14}$$

Vi har $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (6x, -2y, 8z)$ så i punkten $(1, 1, 1)$ är $\nabla f = (6, -2, 8)$. Insättning i (14) ger

$$(6, -2, 8) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0 \cdots \Rightarrow \ldots 3x - y + 4z = 6.$$

Notera sedan att $\mathbf{u}$ är en enhetsvektor. Så riktningsderivatan i riktningen $\mathbf{u}$ är

$$\nabla f \cdot u = (6, -2, 8) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) = \cdots = 4\sqrt{6}.$$

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(1, 1)$ för funktionen $f(x, y) = \ln(x + y) + \sin(x - y)$. Ange svaret på formen $f(1 + h, 1 + k) \approx \ldots$. (3p)

Lösning: Man beräknar i tur och ordning

$$f = \ln(x + y) + \sin(x - y), \quad f_x = \frac{1}{x + y} + \cos(x - y), \quad f_y = \frac{1}{x + y} - \cos(x - y),$$
$$f_{xx} = \frac{-1}{(x + y)^2} - \sin(x - y), \quad f_{xy} = \frac{-1}{(x + y)^2} + \sin(x - y), \quad f_{yy} = \frac{-1}{(x + y)^2} - \sin(x - y).$$

Med tanke på att $\cos 0 = 1$ och $\sin 0 = 0$ så har vi i punkten $(1, 1)$ att

$$f = \ln 2, \quad f_x = \frac{3}{2}, \quad f_y = \frac{-1}{2}, \quad f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = \frac{-1}{4}. \tag{15}$$

Formeln för Taylorapproximationen av grad 2 lyder

$$f(a + h, b + k) \approx f + (hf_x + kf_y) + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}),$$

där alla funktionerna beräknas i punkten (a, b). Insättning av värdena i (15) ger slutligen

$$f(1 + h, 1 + k) \approx \ln 2 + \frac{3h}{2} - \frac{k}{2} - \frac{1}{8}(h + k)^2.$$

(c) Bestäm längden av kurvan $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$, där $x(t) = t^2 - 2t$, $y(t) = t^2 + 2t$. (3p)

Lösning: Längden ges av

$$\int_0^1 |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt =$$
$$= \int_0^1 \sqrt{(2t-2)^2 + (2t+2)^2}\, dt = \cdots = 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{t^2+1}\, dt. \tag{16}$$

Den sista integralen är en standardintegral som finns på formelbladet. Nämligen gäller att

$$\int_0^1 \sqrt{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+1} + \ln|t + \sqrt{t^2+1}|\right)_0^1 = \cdots = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right).$$

Insättning i (16) innebär att längden av kurvan är $2 + \sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$.

(a) Förklara varför funktionen f måste ha både ett globalt maximum och minimum i hela $\mathbb{R}^2$. (1p)

(b) Bestäm dessa globala extremvärden. (4p)

Lösning (a): Funktionen f är uppenbarligen definierad och kontinuerlig i hela planet. Dessutom ser man tydligt att $f(x, y) \to 0$ då avståndet av (x, y) från origo går mot oändlighet. Därför kommer både ett globalt maximum och ett globalt minimum att antas inom någon skiva kring origo.

(b): De globala extremvärdena måste antas i kritiska punkter, så vi bestämmer dessa. Vi har

$$f_x = \frac{y^2 - x^2 - 2xy + 1}{(x^2+y^2+1)^2}, \quad f_y = \frac{x^2 - y^2 - 2xy + 1}{(x^2+y^2+1)^2}. \tag{17}$$

I en kritisk punkt är $f_x = f_y = 0$, som innebär att täljarna i (17) måste vara noll, alltså $y^2 - x^2 - 2xy + 1 = 0$ samt $x^2 - y^2 - 2xy + 1 = 0$. Subtraherar vi den ena ekvationen från den andra får vi att $y^2 = x^2$, som medför att $y = \pm x$.

Fall 1: $y = -x$. Insättning ger $x^2 - (-x)^2 - 2x(-x) + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 0$, som är osatisfierbar ty VL är alltid positivt.
Fall 2: $y = x$. Insättning ger i stället $x^2 - x^2 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = y = \pm 1/\sqrt{2}$.

Sedan kontrollerar vi att

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Eftersom dessa är de enda två kritiska punkterna kan vi dra slutsatsen att $\frac{1}{\sqrt{2}}$ är den globala maximum och att $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ är den globala minimum.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2015-01-02	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

Till följande två uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

3. (a) Beräkna arbetet som utförs av kraftfältet $\mathbf{F} = (xe^y, y^2)$ först längs kurvan $y = x^2$ från $(0, 0)$ till $(1, 1)$ och sedan tillbaka till $(0, 0)$ längs kurvan $y = x$

i. genom att räkna ut kurvintegralerna direkt. (3p)

ii. genom att använda Greens sats. (2p)

(TIPS: $\int xe^x\,dx = (x-1)e^x + C$.)

(b) Ange en funktion $f(x, y)$ sådan att fältet $\mathbf{G} = \mathbf{F} + f(x, y)\mathbf{j}$ är konservativt. (2p)

Lösning (a): Låt $\mathcal{C}_1$ vara sträckan längs $y = x^2$ från $(0, 0)$ till $(1, 1)$ och $\mathcal{C}_2$ vara sträckan tillbaka längs $y = x$. Kurvintegralen är

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} F_1\,dx + F_2\,dy + \int_{\mathcal{C}_2} F_1\,dx + F_2\,dy,$$

där $F_1 = xe^y$ och $F_2 = y^2$. Först tar vi $\mathcal{C}_1$. Längs denna är $y = x^2$ så $dy = 2x\,dx$ och x går från 0 till 1. Således är

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx + x^4(2x\,dx) =$$

$$= \int_0^1 (xe^{x^2} + 2x^5)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{x^6}{3}\right]_0^1 = \cdots = \frac{e}{2} - \frac{1}{6}.$$

Längs $\mathcal{C}_2$ är $y = x$ så $dy = dx$ och x går från 1 ner till 0. Således är

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_1^0 (xe^x + x^2)\,dx = \left[(x-1)e^x + \frac{x^3}{3}\right]_1^0 = \cdots = -\frac{4}{3}.$$

Sammanlagt är alltså kurvintegralen $\left(\frac{e}{2} - \frac{1}{6}\right) - \frac{4}{3} = \frac{e-3}{2}$.

(b): Greens sats säger att kurvintegralen är lika med

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = -\iint_D xe^y\,dx\,dy,$$

där D är det område som inneslutas av $y = x^2$ och $y = x$. Alltså får vi dubbelintegralen

$$-\int_0^1 x\,dx \int_{x^2}^x e^y\,dy = \int_0^1 (xe^{x^2} - xe^x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{x^2} - (x-1)e^x\right]_0^1 = \cdots = \left(\frac{e}{2} + 0\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{e-3}{2}.$$

(c): $\mathbf{G}_1 = F_1 = xe^y$ och $G_2 = F_2 + f = y^2 + f$. Fältet är konservaitvt om och endast om

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial G_1}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = xe^y \Leftrightarrow f(x, y) = \int xe^y\,dx = \frac{1}{2}x^2e^y + C(y),$$

där $C(y)$ är en valfri (deriverbar) funktion av endast y.

4. (a) Beräkna arean av den del av ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy-planet. (2p)

(b) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xy, e^xz^2, x^2 + z)$ upp genom den delen av ytan. (4p)

Lösning (a): Ytan är en funktionsyta $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ så

$$dS = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}\, dx\, dy = \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\, dx\, dy = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dx\, dy.$$

Vi integrerar sedan över ytans projektion $\pi(S)$ på xy-planet, som är just insidan av cirkeln $z = 0 = 4 - x^2 - y^2$, dvs skivan $x^2 + y^2 \leq 4$. Det är lämpligt att byta till polära koordinater och så får vi

$$\iint_S dS = \iint_{\pi(s)} \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\sqrt{4r^2 + 1}\, dr.$$

r-integralen beräknas med hjälp av substitutionen $u = 4r^2 + 1$ och det slutgiltiga svaret är $\frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1)$.

(b): Låt S_2 vara locket, dvs skivan $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$. Gauss sats säger att

$$\iint_{S \cup S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV, \tag{18}$$

där D är det inneslutna området. Vi har

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + 0 + 1 = y + 1.$$

Av symmetriskäl kommer integralen av y över D att vara noll. Så HL i (18) är just volymen av D. Området parametriseras enklast med cylindriska koordinater och vi får

$$\text{Vol}(D) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\, dr \int_0^{4-x^2-y^2} dz = 2\pi \int_0^2 r(4 - r^2)\, dr = \cdots = 8\pi.$$

Sedan måste vi enligt (18) subtrahera flödesintegralen över locket. Där är $\mathbf{N} = (0, 0, -1)$ och $z = 0$ så vi får

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = -\iint_{x^2+y^2 \leq 4} x^2\, dx\, dy =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \int_0^2 (r\cos\theta)^2\, r\, dr\, d\theta = -\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^2 r^3\, dr = \cdots = -4\pi.$$

Insättning i (18) ger att

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = 8\pi - (-4\pi) = 12\pi.$$

5. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $\iint_D \frac{e^{x^2}}{x}\, dA$ över området D i planet som begränsas av $y = 0$, $y = x^2$ och $x = 1$. (2p)

Lösning: Man måste integrera med avseende på y först. Således får vi

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{x}\, dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

(b) Bestäm masscentrumet för den solida halvkonen $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq 1$, om densiteten i punkten $(x,\, y,\, z)$ ges av $\rho(x,\, y,\, z) = z$. (3p)

(Tips: Massan av halvkonen är $\pi/4$, detta kan man ta som givet.)

Lösning: Av symmetriskäl så ligger masscentrumet på z-axeln. Dess z-koordinat är

$$m_z = \frac{\iiint z\rho\, dV}{\iiint \rho\, dV} = \frac{\iiint z^2\, dV}{\text{Massan}} = \frac{4}{\pi} \iiint z^2\, dV. \tag{19}$$

Integralen beräknas enklast i cylindriska koordinater. Vi får

$$\begin{aligned} \iiint z^2\, dV &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 z^2\, dz \left(\int_0^z r\, dr\right) = \\ &= 2\pi \times \frac{1}{2} \times \int_0^1 z^4\, dz = \cdots = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

Insättning i (19) ger $m_z = 4/5$, så masscentrumet ligger i punkten $(0,\, 0,\, \frac{4}{5})$.