Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys

2015-01-05 kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Dawan Mustafa, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng från kryssuppgifterna.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidor 3-4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se sidor 5-6

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Betrakta ytan Y som ges av ekvationen $x^2+y^2=4, 1\le z\le 2$.

(a) Parametrisera ytan och bestäm vektorytareaelementet $d\mathbf{S}$ $(=\widehat{\mathbf{N}}dS)$. (3p)

(b) Låt $\mathbf{F}=e^{x^2}y\,\mathbf{i}+\frac{\sin z}{z}\,\mathbf{j}+e^{yz}\,\mathbf{k}$. Bestäm flödet ut ur Y. (3p)

Lösning (a): Ytan är den del av en cylinder så den naturliga parametriseringen är med cylindriska koordinater:

$$x=2\cos\theta,\;\; y=2\sin\theta,\;\; z=z,\;\; 0\le\theta\le 2\pi,\;\; 1\le z\le 2. \tag{1}$$

I vektorform ges ytan av

$$\mathbf{r}(\theta,\,z)=(x,\,y,\,z)=(2\cos\theta,\,2\sin\theta,\,z),\;\; 0\le\theta\le 2\pi,\;\; 1\le z\le 2.$$

Vektorareaelementet ges således av

$$d\mathbf{S}=\pm\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right)d\theta\,dz=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}d\theta\,dz=$$

$$=\pm\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2\sin\theta & 2\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}d\theta\,dz=\pm(2\cos\theta,\,2\sin\theta,\,0)\,d\theta\,dz.$$

Notera att riktningen av $d\mathbf{S}$ är $\pm$ den radiala vektorn i xy-planet, något som man hade också kunnat inse direkt från cylinderns utseende. Eftersom vi är intresserade av den utåtpekande normalen så väljer vi plus tecknet och får slutligen

$$d\mathbf{S} = (2\cos\theta,\, 2\sin\theta,\, 0)\, d\theta\, dz. \tag{2}$$

(b): Flödet är noll av symmetriskäl. Enklaste sättet att se detta är att först konstatera att, från (1) och (2),

$$d\mathbf{S} = (x,\, y,\, 0)\, d\theta\, dz.$$

Således är

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = (e^{x^2}y,\, \frac{\sin z}{z},\, e^{xy})\cdot(x,\, y,\, 0)\, d\theta\, dz = \left[xye^{x^2} + y\left(\frac{\sin z}{z}\right)\right] d\theta\, dz.$$

När vi sedan integrerar över cylindern, poängen är att cylindern är symmetrisk kring z-axeln så integralen av antingen y eller xye^{x^2} över varje horisontell cirkel blir noll (alla positiva bidragen tas ut av exakt cancellerande negativa sådana). När vi sedan integrerar i z-led spelar det ingen roll att vi har en komplicerad term som $\frac{\sin z}{z}$, för sammanlagt blir integralen bara noll ändå.

7. (a) Om $f(x)$ är en funktion av en variabel med en kontinuerlig andra derivata och $c \neq 0$ är en konstant, bevisa att funktionen $g(x,\, t) = f(x - ct) + f(x + ct)$ uppfyller den så kallade vågekvationen (3p)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.$$

(b) Använd kedjeregeln för att bevisa formeln för riktningsderivatan av en differentierbar funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, i riktningen $\mathbf{u}$: $D_{\mathbf{u}}h = \nabla h \bullet \mathbf{u}$. (3p)

Lösning (a): Låt f' beteckna derivatan av f. Enligt kedjeregeln har vi å ena sidan

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(x-ct)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x-ct) + f'(x+ct)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x+ct) = f'(x-ct) + f'(x+ct),$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f'(x-ct) + \frac{\partial}{\partial x} f'(x+ct) =$$

$$= f''(x-ct)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x-ct) + f''(x+ct)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x+ct) = f''(x-ct) + f''(x+ct),$$

och å andra sidan

$$\frac{\partial g}{\partial t} = f'(x-ct)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(x-ct) + f'(x+ct)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(x+ct) = -c\cdot f'(x-ct) + c\cdot f'(x+ct),$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) = -c\cdot\frac{\partial}{\partial t} f'(x-ct) + c\cdot\frac{\partial}{\partial t} f'(x+ct) =$$

$$= -c\cdot\left[f''(x-ct)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(x-ct)\right] + c\cdot\left[f''(x+ct)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(x+ct)\right] =$$

$$= -c\cdot\left[f''(x-ct)\cdot(-c)\right] + c\cdot\left[f''(x+ct)\cdot c\right] = c^2\left[f''(x-ct) + f''(x+ct)\right] = c^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad \text{v.s.v.}$$

(b): Sats 12.7.7 i boken.

8. Låt $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Visa att $\mathbf{div}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = 0$ genom att:

(a) använda definitionerna för **div** och **curl** och räkna ut uttrycket. (3p)

(b) använda lämpliga satser för att visa att $\iiint_M \mathbf{div}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{F}\, dV = 0$ för alla mängder $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Här får ni använda att om man har en kontinuerlig funktion f och $\iiint_M f dV = 0$ för alla M, så är även $f = 0$, en konsekvens av medelvärdessatsen. (3p)
TIPS: Randen till en sluten yta är tom.

Lösning (a): Sats 16.2.3(g) i boken.

(b): Låt M vara en delmängd till $\mathbb{R}^3$ som är begränsad men har en nollskild volym. Gauss divergenssats medför att

$$\iiint_M \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})\, dV = \iint_{\partial M} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

där ∂M betecknar randen till M, som är någon slags *sluten yta*. Stokes sats sedan medför att

$$\iint_{\partial M} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_{\partial(\partial M)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där $\partial(\partial M)$ betecknar rand*kurvan* til ytan ∂M. Men ∂M är sluten så dess rand är tom och kurvintegralen är således noll. Därmed är även den ursprungliga integralen noll, dvs $\iiint_M \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})\, dV = 0$. Detta gäller för en godtycklig M så medelvärdessasten medför att $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$, v.s.v.

Formelblad för TMA043 och MVE085, 14/15

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0 \qquad \int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0 \qquad \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2015-01-05	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm huruvida följande mängder är öppna, slutna eller varken eller. Motivera kort. (3p)

i. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
ii. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$.
iii. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

Lösning: Mängden i (i) är öppen, som visas av att man har en sträng olikhet i villkoret "$x^2 + y^2 < 1$". För en mer precis resonemang, antag att $\mathbf{p} = (x, y)$ är en punkt i mängden. Låt $r = x^2 + y^2$. Då är $r < 1$ så om vi låter $\varepsilon := \frac{1-r}{2}$ så är $\varepsilon > 0$ och mängden innehåller bollen $B_\varepsilon(\mathbf{p})$.
Mängden i (iii) är sluten pga att villkoret är på formen "mindre än *eller lika med*".
Mängden i (ii) är varken öppen eller sluten. Den ligger i xy-planet och som en delmängd till detta plan är den visserligen öppen, på samma sätt som i (i). Men ingen tre dimensionell boll tillhör mängden i sin helhet och därmed är mängden inte öppen som en delmängd till $\mathbb{R}^3$.

(b) En partikel rör sig längs kurvan $\mathbf{r}(t) = (\sin(t),\ t^2,\ t^6 - e^t)$. Bestäm den punkt där hastigheten är $(1, 0, -1)$, och beräkna accelerationen i denna punkt. (2p)

Lösning: Hastigheten i en godtycklig punkt ges av

$$\mathbf{r}'(t) = (\cos(t),\ 2t,\ 6t^5 - e^t).$$

Vi söker t-värdet sådan att $\mathbf{r}'(t) = (1, 0, -1)$. Det är enklast att jämföra y-koordinaterna och man ser direkt att $t = 0$. Motsvarande punkt är alltså $\mathbf{r}(0) = (0, 0, -1)$.
Accelerationen i en godtycklig punkt ges av

$$\mathbf{r}''(t) = (-\sin(t),\ 2,\ 30t^4 - e^t).$$

Så vid $t = 0$ har vi $\mathbf{r}''(0) = (0, 2, -1)$.

(c) Parametrisera kurvan som ges av ekvationen $x^2 + 2x + y^2 = 8$ på formen $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$ för lämpliga a och b. Ange dessutom en formel för en tangentvektor av enhetslängd i en godtycklig punkt på kurvan. (3p)

Lösning: Efter kvadratkomplettering lyder ekvationen

$$(x - 1)^2 + y^2 = 3^2,$$

som är ekvationen till en cirkel av radie 3 och centrum i $(1, 0)$. Dess naturliga parametrisering är alltså

$$x(t) = 1 + 3\cos(t), \quad y(t) = 3\sin(t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Formeln för en tangentvektor ges av

$$\mathbf{T} = (x'(t),\ y'(t)) = (-3\sin(t),\ 3\cos(t)).$$

Dess längd är

$$||\mathbf{T}|| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2} = \cdots = 3,$$

så en tangentvektor av enhetslängd ges av

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{||\mathbf{T}||} = (-\sin t,\ \cos t).$$

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

(a) Hitta och klassificera alla kritiska punkter till $f(x,y)$. (4p)

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 för f i punkten $(2,\,-1)$. Ange svaret på formen $f(2+h,\,-1+k) \approx \ldots$. (2p)

Lösning (a): I en kritisk punkt är

$$f_x = 4x^3 - 4y = 0, \tag{3}$$
$$f_y = 4y^3 - 4x = 0. \tag{4}$$

(3) medför att $x^3 = y$ och insättning i (4) ger $x = y^3 = (x^3)^3 = x^9$, så $x = x^9$ och antingen är $x = 0$ eller $1 = x^8$. Det senare alternativet har i sin tur två lösningar $x = \pm 1$. Eftersom $y = x^3$ har vi alltså tre kritiska punkter, $(0,\,0)$, $(1,\,1)$ och $(-1,\,-1)$. För att klassificera dem beräknar vi Hessianen

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

I punkten $(0,\,0)$ har vi $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, så $\det(\mathcal{H}) = -16 < 0$ och $(0,\,0)$ är en sadelpunkt.

I båda punkterna $\pm(1,\,1)$ har vi $f_{xx} = 12 > 0$ och $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$ så $\det(\mathcal{H}) = 128 > 0$ och dessa två punkter är lokala minima.

(b): Formeln för Taylorpolynomet av grad 2 i en punkt $(a,\,b)$ lyder

$$f(a+h,\,b+k) \approx f(a,\,b) + (hf_x + kf_y) + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}), \tag{5}$$

där alla partiella derivatorna beräknas i punkten $(a,\,b)$. I vårt fall har vi $(a,\,b) = (2,\,-1)$ och man kan kontrollera att i denna punkt är

$$f = 29, \quad f_x = 36, \quad f_y = -12, \quad f_{xx} = 48, \quad f_{xy} = -4, \quad f_{yy} = 12.$$

Insättning i (5) ger

$$f(2+h,\,-1+k) \approx 29 + (36h - 12k) + (24h^2 - 4hk + 6k^2).$$

Anonym kod	**MVE085 Flervariabelanalys 2015-01-05**	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

Till följande två uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

3. Låt $\mathbf{F} = -ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$ för några konstanter a och b.

(a) Låt C vara randen till ett område D med inducerad orientering. Formulera Greens sats för paret C och D, och bestäm en relation mellan a och b så att $\oint_C \mathbf{F} \bullet dr = \text{Area}(D)$. (2p)

(b) Använd sedan $\oint_C \mathbf{F} \bullet dr$ för att räkna ut arean av området som ligger innanför kurvan som ges av parametriseringen $\mathbf{r}(t) = 3(\cos(t)+\sin(t))\mathbf{i}+2(\sin(t)-\cos(t))\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$. (3p)

Lösning (a): Greens sats lyder

$$\oint_C F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{6}$$

då $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$. I vårt fall är $F_1 = -ay$ och $F_2 = bx$ så högerledet i (6) är $(b + a)\iint_D dx\,dy = (b+a) \times \text{Area}(D)$. Så kurvintegralen blir lika med arean då $b + a = 1$.

(b): Då man tillämpar **(a)** är det enklast att sätta $a = b = 1/2$ sådan att

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy. \tag{7}$$

Här har vi

$$x = x(t) = 3(\cos t + \sin t) \Rightarrow dx = 3(-\sin t + \cos t)\,dt,$$
$$y = y(t) = 2(\sin t - \cos t) \Rightarrow dy = 2(\cos t + \sin t)\,dt.$$

Insättning i (7) ger

$$\text{Area}(D) = 6\int_0^{2\pi} [(\cos t+\sin t)^2+(\cos t-\sin t)^2]\,dt = 12\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt = 12\int_0^{2\pi} dt = 24\pi.$$

4. Låt $\mathbf{F} = (y^2,\, x + yz,\, z)$.

(a) Bestäm **div** och **curl** av $\mathbf{F}$. (2p)

(b) Beräkna flödet upp ur halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0$. (3p)

Lösning (a):

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 + z + 1 = z + 1, \tag{8}$$

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \cdots = (-y,\, 0,\, 1 - 2y).$$

(b): Låt S_1 beteckna halvsfären och S_2 dess lock, dvs S_2 är enhetsskivan $x^2 + y^2 \le 1$ i xy-planet. Gauss sats säger att

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_D (\text{div}\mathbf{F})\,dV, \tag{9}$$

där D är det solida halvklotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $z \ge 0$. Halvklotet parametriseras fördelaktigt i sfäriska koordinater enligt

$$D: \quad 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Från detta och (8) har vi

$$\iiint_D (\mathrm{div}\mathbf{F})\, dV = \iiint_D (z+1)\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (\rho\cos\phi + 1)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\phi\cos\phi\, d\phi \int_0^1 \rho^3\, d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\phi\, d\phi \int_0^1 \rho^2\, d\rho = \cdots = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}.$$

För att ta reda på flödet upp genom S_1 måste vi sedan enligt (9) subtrahera flödet ner genom locket S_2. Men på locket är $z = 0$ så $\mathbf{F} = (y^2,\, x,\, 0)$ medan att $\hat{\mathbf{N}} = (0,\, 0,\, -1)$, så $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$ och flödet genom locket är noll.

SVAR: $\frac{11\pi}{12}$.

5. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna den generaliserade integralen $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$. (2p)

Lösning: I polära koordinater blir integralen

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = 2\pi \times \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^{\infty} d(e^{-r^2}) = \pi \times e^{-r^2}|_{\infty}^{0} = \pi(1-0) = \pi.$$

(b) Låt $\mathbf{F} = (2xy + z^3,\, x^2 + 2yz,\, y^2 + 3xz^2 + 1)$.

i. Vektorfältet är konservativt. Bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (2p)

ii. Räkna ut arbetet som $\mathbf{F}$ utför längs en godtycklig kurva som börjar i (0, 0, 0) och slutar i (1, 2, 1). (1p)

Lösning (i): En potential ϕ ska uppfylla

$$\begin{aligned}
\phi &= \int F_1\, dx = \int (2xy + z^3)\, dx = x^2y + xz^3 + C_1(y,\, z),\\
\phi &= \int F_2\, dy = \int (x^2 + 2yz)\, dy = x^2y + y^2z + C_2(x,\, z),\\
\phi &= \int F_3\, dz = \int (y^2 + 3xz^2 + 1)\, dz = y^2z + xz^3 + z + C_3(x,\, y).
\end{aligned}$$

Dessa tre villkor blir konsekventa med varandra då vi väljer

$$\phi(x,\, y,\, z) = x^2y + xz^3 + y^2z + z + C, \tag{10}$$

där C är en valfri konstant.

(ii): Från (10) har vi att arbetet ges av

$$\phi(1,\, 2,\, 1) - \phi(0,\, 0,\, 0) = (8 + C) - (0 + C) = 8.$$

(c) Beräkna arean av den del av ytan $z = x^2 + y^2 + 1$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 9$. (3p)

Lösning: Kalla ytan för $\mathcal{S}$. Det är en funktionsyta $z = f(x,\, y) = x^2 + y^2 + 1$ så areaelementet ges av

$$dS = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}\, dx\, dy = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, dx\, dy = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dx\, dy.$$

För att beräkna arean innanför cylindern $x^2 + y^2 = 9$ så integrerar vi dS över projektionen av $\mathcal{S}$ på xy-planet, som är just skivan $x^2 + y^2 \le 9$. Det är lämpligt att byta till polära koordinater och vi får

$$\iint_{\pi(\mathcal{S})} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1}\, (r\, dr\, d\theta) = 2\pi \int_0^3 r\sqrt{4r^2 + 1}\, dr.$$

r-integralen beräknas med hjälp av substitutionen $u = 4r^2 + 1$ och blir $\frac{1}{8}\int_1^{37} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{12}(37^{3/2} - 1)$. Svaret är detta gånger 2π, alltså $\frac{\pi}{6}(37^{3/2} - 1)$.