Tentamen
MVE085 Flervariabelanalys V2

2015-08-28 kl. 8.30–12.30

Examinator: Dennis Eriksson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Timo Hirscher, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen tills kursen ges nästa läsår. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar, inklusive eventuella bonuspoäng från kryssuppgifterna.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen, del 1

Uppgift 1 och 2 se sidor 3-4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3, 4 och 5 se sidor 5-6

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. ...... $x + y + 2z = 2$ skär ...... $z = x^2 + y^2$ i en ...... (fyll i de rätta orden !). Bestäm de punkter på skärningskurvan som ligger närmast och längst bort från origo. (5p)

7. (a) Ange och bevisa formeln för volymelementet i sfäriska koordinater. (3p)

(b) Låt $f(x, y)$ vara en funktion som är definierad på ett slutet, begränsat och sammanhängande område D i planet, och kontinuerlig däri. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för f. (3p)

(c) Definiera vad som menas med att en funktion $f(x, y)$ är *differentierbar* i en punkt (a, b). (1.5p)

8. (a) Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i}+4x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$. Bestäm $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathcal{C}$ är skärningen mellan $z = x+4$ och $x^2 + y^2 = 4$. (4p)

(b) Låt $\mathbf{F}$ vara ett glatt vektorfält (dvs alla dess partiella derivator av alla ordningar är kontinuerliga, så inga konstigheter !) och $\mathcal{S}$ en sfär. Vad kan man säga om $\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}(\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$? Motivera ditt svar ! (1.5p)

Formelblad för TMA043 och MVE085, 14/15

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \quad , \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad , \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2015-08-28	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ellipsoiden $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ i punkten $(-2, 1, -3)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(1, 1)$ för funktionen $f(x, y) = e^{x^2-y}$ och använd detta för att uppskatta värdet av $f(1.1, 0.9)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Betrakta en partikel som rör sig för $t \geq 1$ enligt $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (\ln t)\mathbf{k}$. Bestäm partikelns acceleration, både som vektor och skalär, vid $t = 2$. Bestäm även längden av banan som partikeln skär ut mellan $t = 1$ och $t = e^2$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $f(x, y) = 2y\sqrt{x} - \ln y + x - 3y$.

(a) Funktionen f har två kritiska punkter. Bestäm och klassificera dessa. (4p)

(b) Om $x = s^2 + t^2$ och $y = \sin(s + t)$, bestäm $\frac{\partial f}{\partial s}$. (2p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys V2 2015-08-28	sid.nummer	Poäng

Godkäntdelen: del 2

Till följande två uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas på separata skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

3. (a) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} = (y^2, -x^2)$. Räkna ut arbetet som $\mathbf{F}$ utför längs randen, orienterad moturs, till den del av enhetsdisken som ligger i övre högra kvadranten.

i. genom att räkna ut kurvintegralerna direkt. (3p)

ii. genom att använda Greens sats. (2p)

4. (a) Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - ze^{-xyz}, xe^{z^2}, ye^{xy})$ och beräkna flödet ut ur kuben begränsad av $0 \leq x, y, z \leq 1$. (3p)

(b) Beräkna flödet av samma vektorfält $\mathbf{F}$ upp genom den sida av kuben som har $z = 1$. (2p)

5. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna $\iint_D ye^{x^3}\, dA$ över området D i planet som begränsas av $y = 0$, $y = x$ och $x = 1$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) i. Bestäm en potential till det konservativa vektorfältet (2p)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + yz, x^2 + xz + z, xy + y).$$

ii. Räkna ut arbetet som vektorfältet $\mathbf{F}$ utför längs en bana som börjar i $(0, 0, 0)$ och slutar i $(1, 1, 1)$. (1p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt R vara området i planet begränsat av $0 \leq x$, $0 \leq y$, $1 \leq \frac{y}{x} \leq 2$ och $1 \leq xy \leq 2$.

i. Räkna ut Jacobiandeterminanten $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ för variabelbytet $u = \frac{y}{x}, v = xy$. (2p)

Hint: $x = \sqrt{\frac{v}{u}}, y = \sqrt{uv}$.

ii. Räkna ut $\iint_R \frac{y}{x}\, dA$. (1p)

Lösning:

Svar: ....