

Tentamen

MVE085 Flervariabelanalys

2016-12-20 kl. 8.30–12.30

Examinator: Dennis Eriksson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Olof Giselsson, telefon: 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs antingen 25 poäng på godkäntdelens två delar sammanlagt inklusive bonuspoäng, eller att båda delarna är godkända var för sig. För godkänt på del 1 krävs minst 10 poäng, för godkänt på del 2 krävs 13 poäng. Erhållen poäng på någon av delarna får ersätta poäng på motsvarande del på senare tentamen. För att få slutbetyg på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens alla delar inklusive eventuella bonuspoäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp. Lycka till!

Godkäntdelen, del 1

Se uppgift 1 och 2 på sida 3-4

Godkäntdelen, del 2

Uppgift 3-8 se sida 5-7

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningssång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

9. (a) Visa att $f(x, y) = x^2(x^2 + y^2)^{-1}$ ej har en kontinuerlig utvidgning till origo. (2p)

(b) Avgör om $f(x, y) = x^3(x^2 + y^2)^{-1}$ är kontinuerlig för alla (x, y) . (4p)

10. (a) Formulera Stokes sats. Glöm inte att skriva upp alla nödvändiga villkor. (1p)

(b) Låt C vara kurvan i $\mathbb{R}^3$ parametriserad av $\vec{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), 2 - \cos(t) - \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Betrakta fältet

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ y \end{pmatrix}.$$

Beräkna arbetsintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. (5p)

11. Beskriv fältlinjerna till $\vec{F}(x, y, z) = (y, x, y^3)$. (6p)

Formelblad TMA044 och MVE085, 16/17

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a \ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz}$, analogt för y_T, z_T .

$\rho(x, y, z)$ är densiteten.

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2016-12-20	sid.nummer	Poäng
------------	---	------------	-------

Godkänddelen: del 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats.
Endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.

- (a) i) Om $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator så är f differentierbar.

A Ja

B Nej

(0.5p)

Svar:

- ii) Låt $f(x, y) = x^2 - y^3$. Vilket av följande uttryck ger Taylorutvecklingar av f till grad 2 i $(1, 1)$?

A $f(1 + h, 1 + k) \simeq P_2(1 + h, 1 + k) = 2h + 3k + h^2 - 3k^2$

B $f(1 + h, 1 + k) \simeq P_2(1 + h, 1 + k) = 2(h - 1) + 3(k - 1) + (h - 1)^2 - 3(k - 1)^2$

C $f(1 + h, 1 + k) \simeq P_2(1 + h, 1 + k) = 2(1 + h) + 3(1 + k) + (1 + h)^2 - 3(1 + k)^2$

(0.5p)

Svar:

- iii) Låt $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion på en domän $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Vilket av följande påståenden är sant?

A Om U är sluten finns ett globalt minimum till f .

B Om U är sluten och begränsad finns ett globalt minimum.

C Om U är begränsad så finns ett globalt maximum.

(0.5p)

Svar:

- (b) Låt $G(x, y, z) := x^3y + 57z$. Bestäm tangentplanet till ytan i $\mathbb{R}^3$ definierad av ekvationen $G(x, y, z) = 0$ i punkten $(0, 0, 0)$.

(2p)

Lösning:

Svar:

(c) Låt $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kurvan parametriserad av $\vec{r}(t) = \left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}t}, e^t\right)$, $t \in [0, 1]$.

i. Bestäm hastigheten i $t = 0$.

(1p)

Lösning:

Svar:

ii. Bestäm längden av $\mathcal{C}$.

(2p)

Lösning:

Svar:

(d) Låt $f = f(z, w)$ vara en två gånger differentierbar funktion. Räkna ut $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(z, w)$ där $z = x + y, w = x^3$.

(3p)

Lösning:

Svar:

Till följande uppgift skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper.
Motivera och förklara så väl du kan.

2. Betrakta funktionerna $f(x, y) = 2y + x$ och $g(x, y) = y^2 + xy - 1$.

(a) Använd Lagranges metod för att hitta extrempunkter till funktionen f under bivillkoret $g(x, y) = 0$.

(3.5p)

(b) Taylorutveckla funktionen g runt punkten $(0, 1)$.

(1p)

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2016-12-20	sid.nummer	Poäng
------------	--------------------------------------	------------	-------

Godkänddelen: del 2

3. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats. Endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas.

- (a) i) Låt $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion på en sluten mängd $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Vilket av följande påståenden om dubbelintegralen $\iint_U f dA$ är i allmänhet falskt?
- A Dubbelintegralen existerar om U är begränsad.
B Dubbelintegralen representerar volymen under grafen $z = f(x, y)$ om $f \geq 0$.
C Dubbelintegralen existerar.

(0.5p)

Svar:

- ii) Är det sant att om $\vec{F} = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är ett glatt konservativt vektorfält, så överensstämmer den partiella derivatan av F_1 med avseende på x med den partiella derivatan av F_2 med avseende på y ?

(0.5p)

Svar:

- iii) Vektorfältet $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ är konservativt. Vilket av följande alternativ är en potential till F ?
- A xyz
B $yz + xz + xy$
C $x + y + z$

(0.5p)

Svar:

4. Betrakta området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\}$. Skissa området D och skriv $\iint_D dA$ på två sätt: genom att hitta integrationsgränserna för $\iint dx dy$ och sedan för $\iint dy dx$. Du behöver ej räkna ut integralen.

(2p)

Lösning:

Svar:

5. (a) Hitta en potential till vektorfältet $\vec{F}(x, y, z) = (6xe^{3x^2}, \cos(y + 3z), 3\cos(y + 3z))$. (2p)

Lösning:

Svar:

- (b) Räkna ut arbetet $\vec{F}$ utför längs kurvan $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$. (1p)

Svar:

6. Bestäm masscentrum av pyramiden med hörn i $(0, 0, 4)$, $(0, 4, 0)$, $(4, 0, 0)$ och $(0, 0, 0)$ vars densitet är konstant 1 genom att använda den angivna formeln i formelsamlingen. Enbart referens till känd formel ger inga poäng. (3p)

Lösning:

Svar:

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2016-12-20	sid.nummer	Poäng
------------	--------------------------------------	------------	-------

Till följande två uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

7. Låt $\mathcal{C}$ vara den moturs orienterade randen till området i $\mathbb{R}^2$ som i polära koordinater ges av $1 \leq r \leq 2$ och $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Beräkna arbetsintegralen $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ där $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$. (2.5p)
8. Låt S beteckna ytan vilken utgör randen till kroppen i $\mathbb{R}^3$ definierad av olikheterna $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ytan S är orienterad som en rand, det vill säga med den utåtpekande normalen. Vi betraktar fältet $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.
- (a) Beräkna $\iint_{S_0} \vec{F} \cdot \hat{N} dS$ där S_0 är delen av S på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ genom att ställa upp flödesintegralen och räkna ut den. (3p)
- (b) Beräkna $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} dS$ på valfritt sätt. (3p)