LÖSNINGAR TILL KOMPLETTERINGSUPPGIFTER 13 OCH 16

K. 13: Ytan är en funktionsyta $z = f(x,y) = 5 + 2x - 2y$ så vi kan använda formeln

$$dS = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}\,dx\,dy = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}\,dx\,dy = 3\,dx\,dy.$$

Så integralen blir

$$\iint_{\mathcal{S}} xz\,dS = \int_1^3 \int_0^2 x(5 + 2x - 2y)\,(3\,dx\,dy) =$$

$$= 3\int_1^3 dy \int_0^2 (5 + 2x^2 - 2xy)\,dx = 3\int_1^3 dy \left(5x^2 + \frac{2}{3}x^3 - x^2y\right)_0^2 =$$

$$= 3\int_1^3 dy \left(10 + \frac{16}{3} - 4y\right) = \int_1^3 (46 - 12y)\;dy = \cdots = 44.$$

K.16: På denna sfär har vi

$$dS = a^2 \sin\phi\,d\phi\,d\theta = 4\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

och

$$(x^2 + y^2)z = (4\sin^2\phi\cos^2\theta + 4\sin^2\phi\sin^2\theta)(2\cos\phi) = 8\sin^2\phi\cos\phi.$$

Vi integrerar över den övre halvsfären så integralen i sfäriska koordinater blir

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(8\sin^2\phi\cos\phi)(4\sin\phi\,d\phi\,d\theta) = 32\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2}\sin^3\phi\cos\phi\,d\phi = 64\pi\int_0^{\pi/2}\sin^3\phi\cos\phi\,d\phi.$$

Denna sista integral beräknar vi via substitutionen $u = \sin\phi$ som leder till

$$64\pi\int_0^1 u^3\,du = \cdots = 16\pi.$$