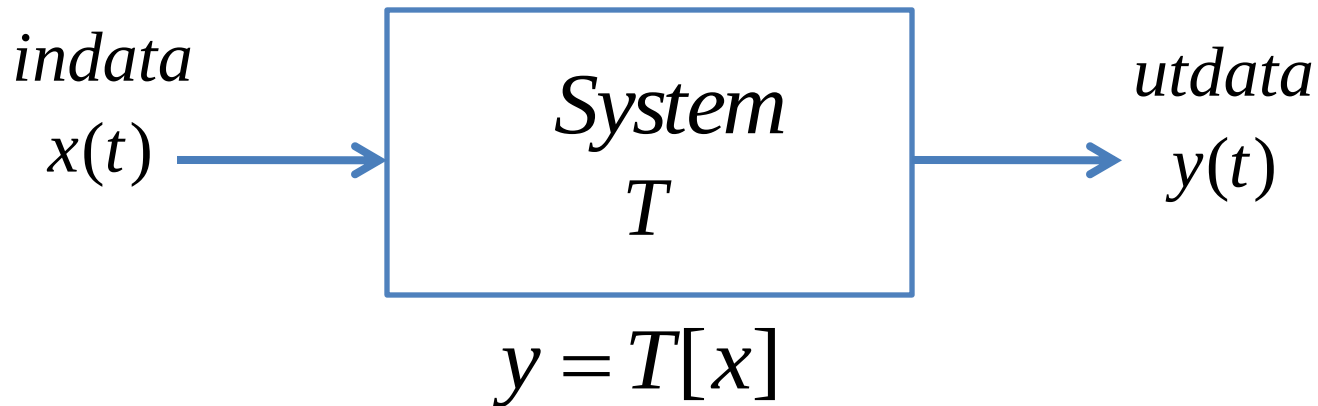


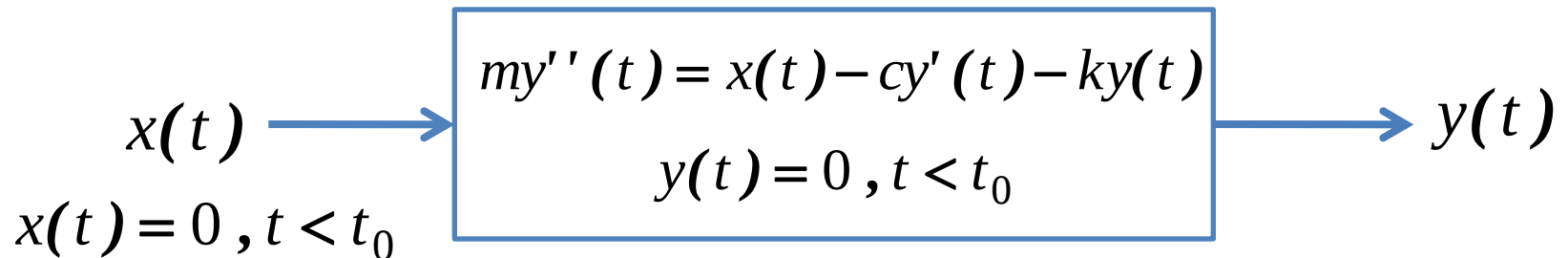
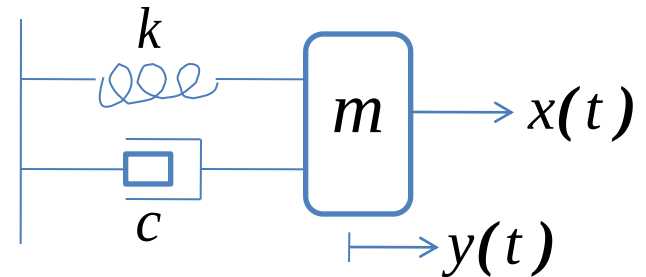
Föreläsning 1

18 jan 2010

Linjära system



Ex. (mass-spring-damper-system)

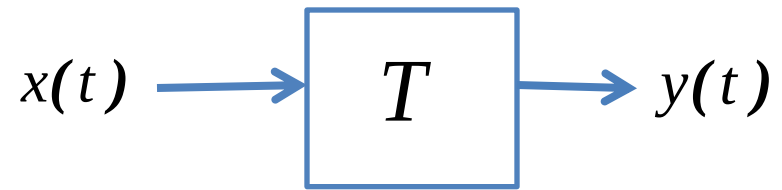
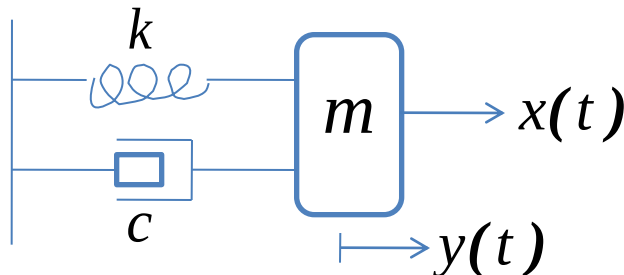


Ett system T sägs vara

- **minneslöst** om värdet på utdata $y(t)$ vid varje tidpunkt t endast beror på indata $x(t)$ vid motsvarande tidpunkt.

I annat fall säger vi att systemet är **dynamiskt**

Ex. massa-fjäder-dämpar-systemet i ex ovan är dynamiskt

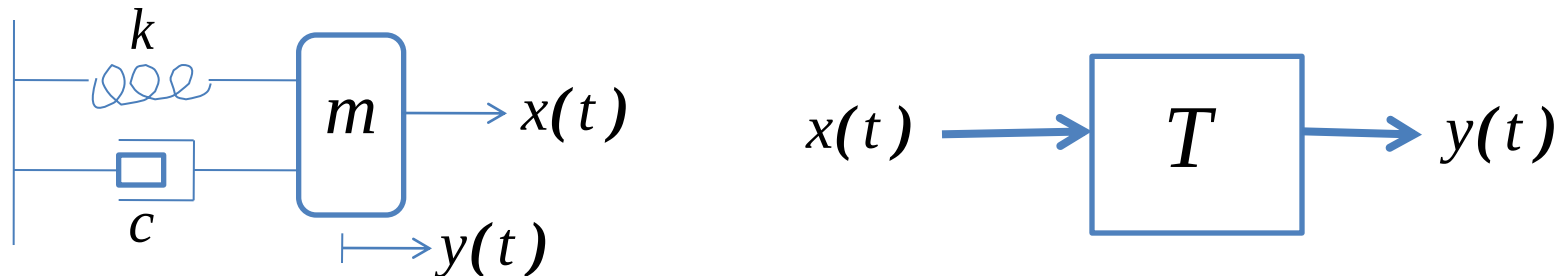


$$my''(t) = x(t) - cy'(t) - ky(t)$$

Ett system T sägs vara

- **kausalt** om utdata $y(t)$ vid varje tidpunkt t endast beror på indata $x(t)$ fram t.o.m. motsvarande tidpunkt dvs. om $y(t_0)$ endast beror på $x(t), t \leq t_0$

Ex. massa-fjäder-dämpar-systemet i ex ovan är kausalt

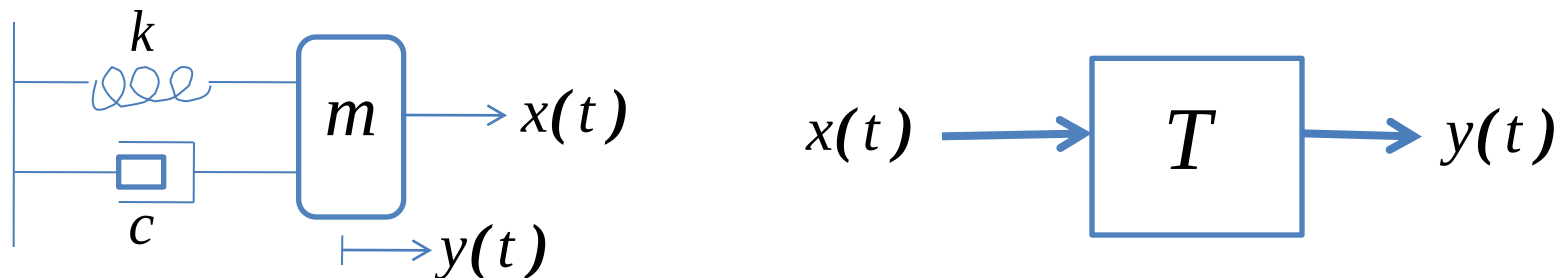


$$my''(t) = x(t) - cy'(t) - ky(t)$$

Ett system T sägs vara

- **Inverterbart** om det råder ett 1-1 förhållande mellan indata och utdata dvs. om två olika indata aldrig ger samma utdata.

Ex. massa-fjäder-dämpar-systemet i ex ovan är inverterbart

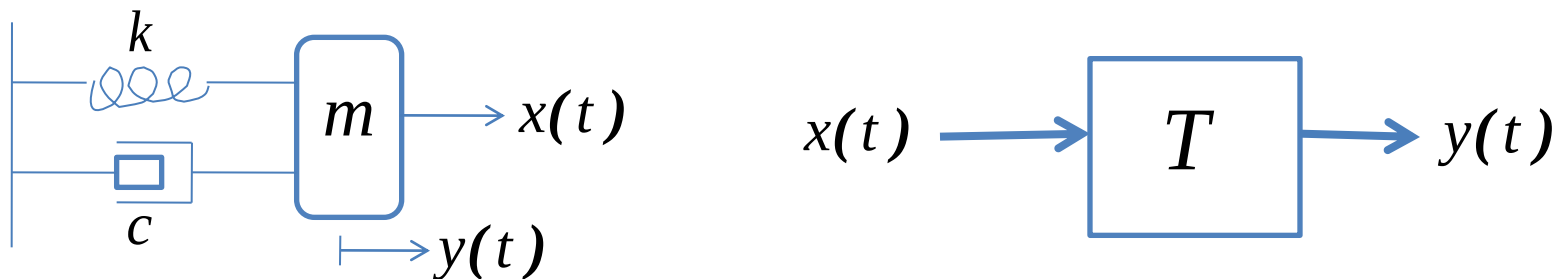


$$my''(t) = x(t) - cy'(t) - ky(t)$$

Ett system T sägs vara

- **stabilt** om begränsad indata ger begränsad utdata
dvs. om $|x(t)| \leq M_1 \Rightarrow |y(t)| \leq M_2$

Ex. stabiliteten i massa-fjäder-dämpar-systemet i ex ovan beror på konstanterna k och c



$$my''(t) = x(t) - cy'(t) - ky(t)$$

Ett system T sägs vara

- **linjärt** om $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$
speciellt följer det då att

$$x(t) = \sum_k x_k(t) \rightarrow$$

$$y(t) = T[x(t)] = T\left[\sum_k x_k(t)\right] = \sum_k T[x_k(t)] = \sum_k y_k(t)$$

vilket kallas **superpositionsprincipen**

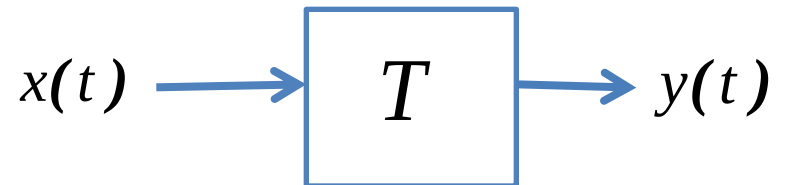
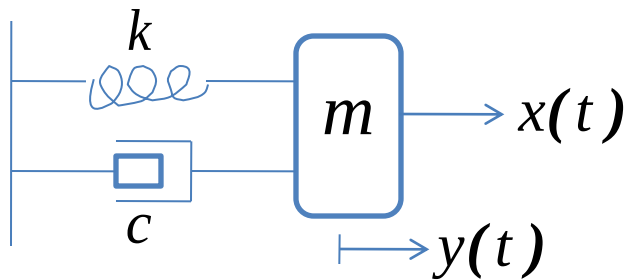
Ex. massa-fjäder-dämpar-systemet i ex ovan är linjärt

Ett system T sägs vara

- **tidsinvariant** om systemet inte förändras med tiden så att

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \xrightarrow{T} y(t - t_0)$$

Ex. massa-fjäder-dämpar-systemet i ex ovan är tidsinvariant

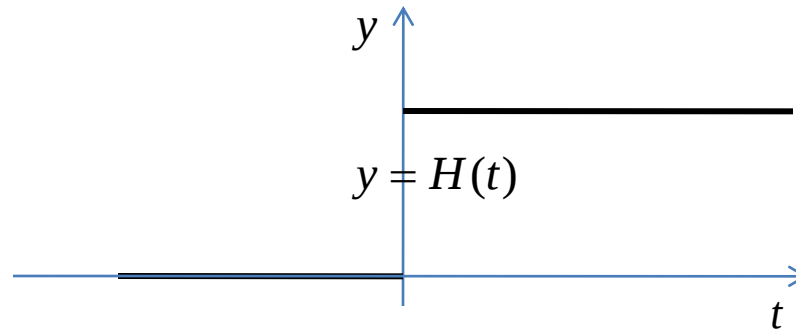


$$my''(t) = x(t) - cy'(t) - ky(t)$$

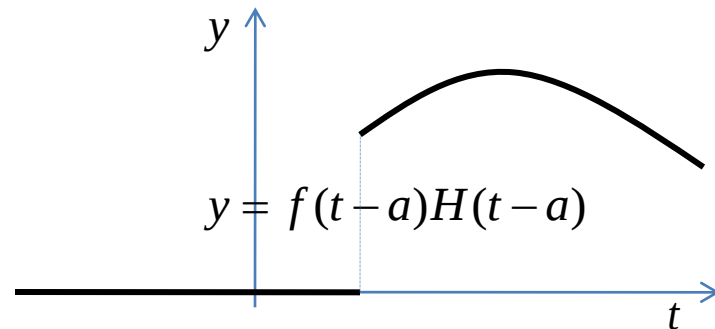
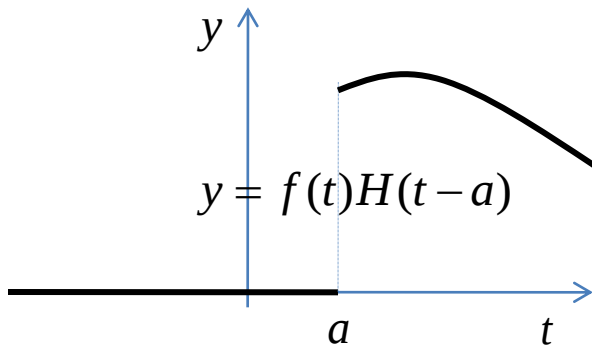
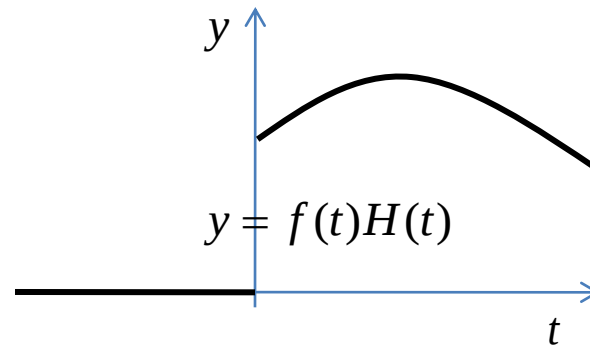
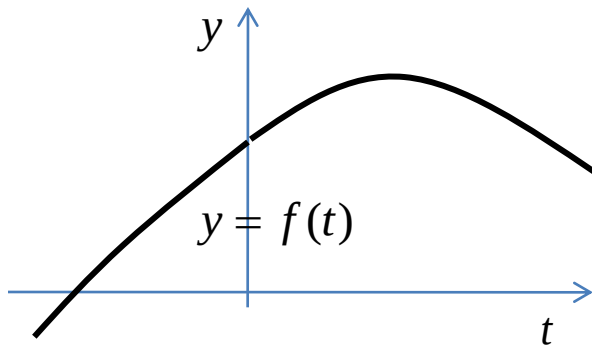
Stegfunktioner och Impulsfunktioner

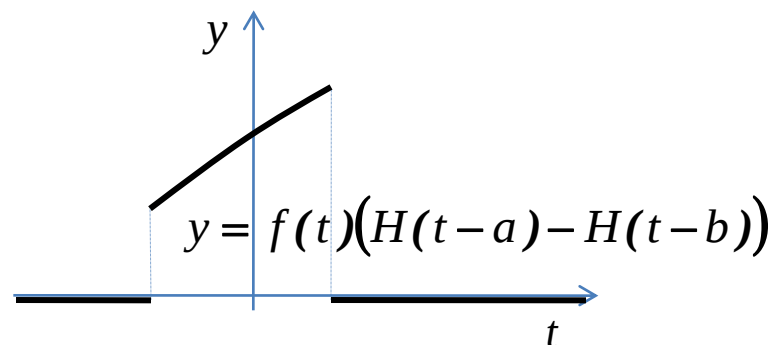
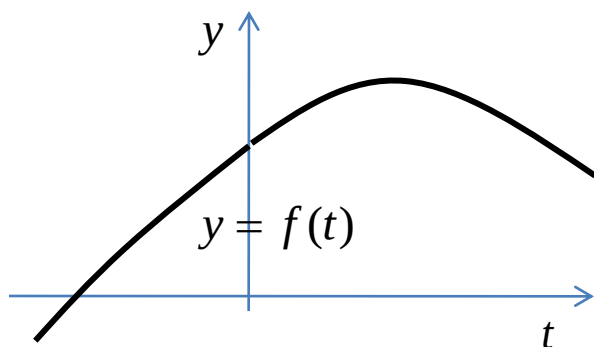
Heavisides stegfunktion $H(t)$

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } t \geq 0 \\ 0, & \text{då } t < 0 \end{cases}$$



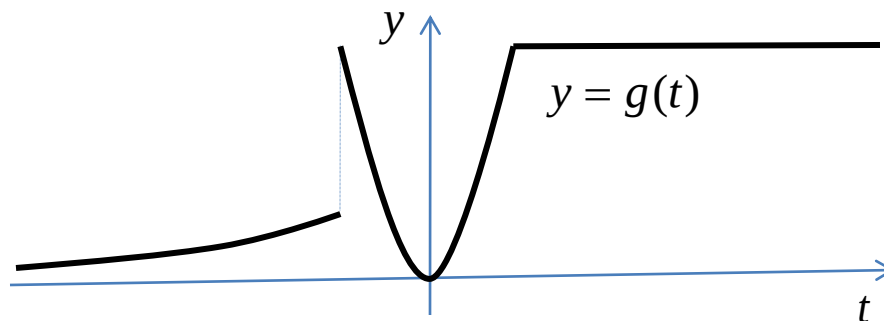
Observera att





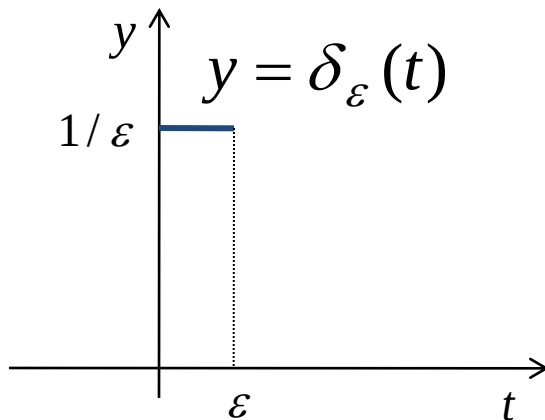
Ex.

$$g(t) = \begin{cases} e^t, & \text{då } t < -1 \\ t^2, & \text{då } -1 \leq t < 1 \\ 1, & \text{då } t \geq 1 \end{cases}$$

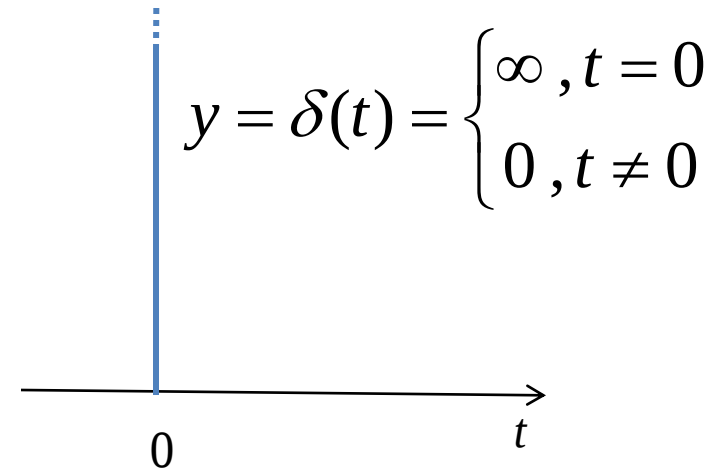


$$\begin{aligned} g(t) &= e^t (1 - H(t+1)) + t^2 (H(t+1) - H(t-1)) + 1 \cdot H(t-1) = \\ &= e^t + (t^2 - e^t)H(t+1) + (1 - t^2)H(t-1) \end{aligned}$$

Impulsfunktionen $\delta(t)$



$$\text{" } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t) \text{"}$$



Observera att $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$ för alla $\varepsilon > 0$ så det är

rimligt att föreställa sig att $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

$\delta(t)$ svarar mot att impulsen 1 tillförs momentant vid tiden $t = 0$, en sorts idealiserad puls.

Eftersom $\delta(t)$ är 0 för $t \neq 0$ så är det rimligt att anta att

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

speciellt följer det att

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}_{\text{skrives } (f*\delta)(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)d\tau = f(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau}_{=1} = f(t)$$

$\delta(t)$ existerar ju inte som funktion i vanlig mening men man kan ge mening åt δ och ovanstående kalkyler inom teorin för generaliserade funktioner (distributioner)

Om T är ett linjärt och tidsinvariant system (LTI-system)
 så följer det att

$$\begin{aligned}
 T[x(t)] &= T\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{super} \\ \text{positions} \\ \text{principen}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} T[x(\tau)\delta(t-\tau)]d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)T[\delta(t-\tau)]d\tau \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tids} \\ \text{invariants}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)T[\delta](t-\tau)d\tau
 \end{aligned}$$

Så $y = T[x] = T[x * \delta] = x * T[\delta]$

dvs utsignalen $y(t)$ kan fås genom "faltning" av
 insignalen $x(t)$ med "impulssvaret" $T[\delta]$

Samband mellan $H(t)$ och $\delta(t)$

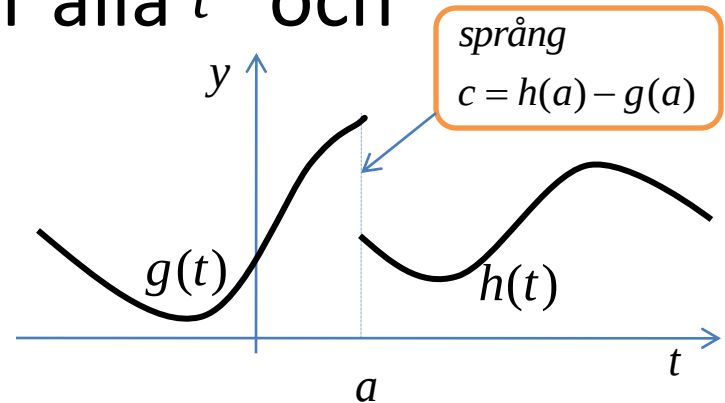
Eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ och $\delta(t) = 0$ för $t \neq 0$ så är

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad \text{och vi får att} \quad H'(t) = \delta(t)$$

Naturligtvis är inte $H(t)$ deriverbar för $t = 0$ i vanlig mening men man kan ge mening åt dessa identiteter om man även tolkar $H(t)$ som en generaliserad funktion

Mer allmänt kan man visa att om $g(t)$ och $h(t)$ är kontinuerliga funktioner för alla t och

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & \text{då } t < a \\ h(t), & \text{då } t \geq a \end{cases}$$



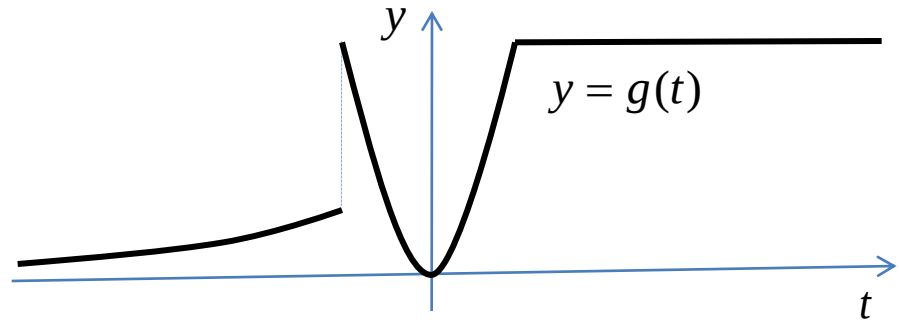
så gäller att

$$f'(t) = \begin{cases} g'(t), & \text{då } t < a \\ h'(t), & \text{då } t \geq a \end{cases} + \underbrace{(h(a) - g(a))}_c \delta(t - a)$$

dvs ett språng (uppåt eller nedåt) med c enheter i en punkt $t = a$ ger ett bidrag med $c\delta(t - a)$ i derivatan.

Ex.

$$g(t) = \begin{cases} e^t, & \text{då } t < -1 \\ t^2, & \text{då } -1 \leq t < 1 \\ 1, & \text{då } t \geq 1 \end{cases}$$



$$g'(t) = \begin{cases} e^t, & \text{då } t < -1 \\ 2t, & \text{då } -1 \leq t < 1 \\ 0, & \text{då } t \geq 1 \end{cases} + (1 - e^{-1})\delta(t + 1)$$

alt. $g(t) = e^t + (t^2 - e^t)H(t + 1) + (1 - t^2)H(t - 1) \Rightarrow$

$$g'(t) = e^t + (2t - e^t)H(t + 1) + (t^2 - e^t)\delta(t + 1) - 2tH(t - 1) + (1 - t^2)\delta(t - 1) \Rightarrow$$

$$g'(t) = e^t + (2t - e^t)H(t + 1) + (1 - e^{-1})\delta(t + 1) - 2tH(t - 1)$$