

Föreläsning 4

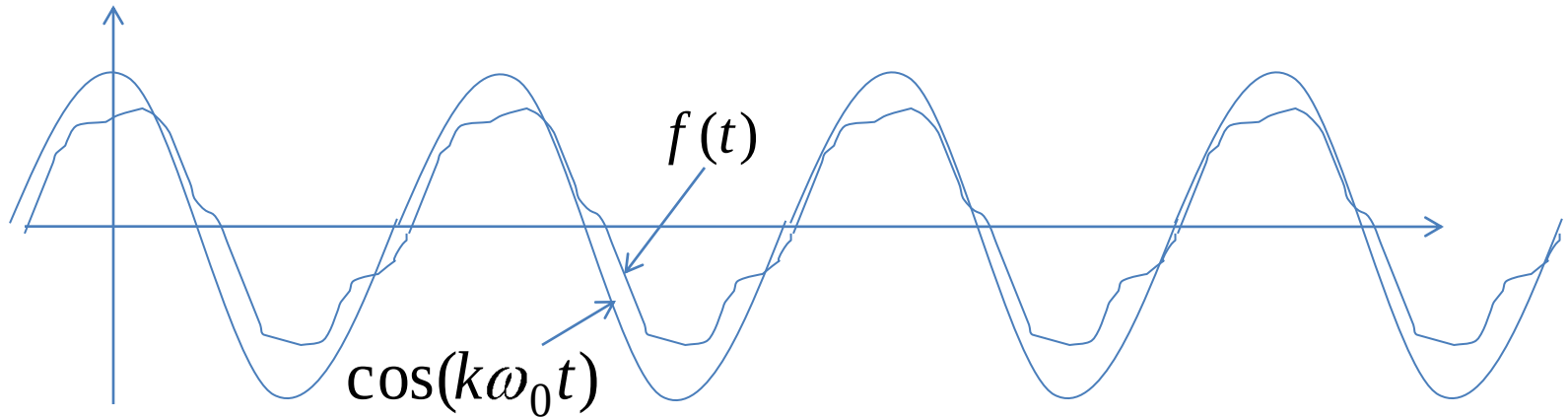
27 jan 2010

I en Fourierserie

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

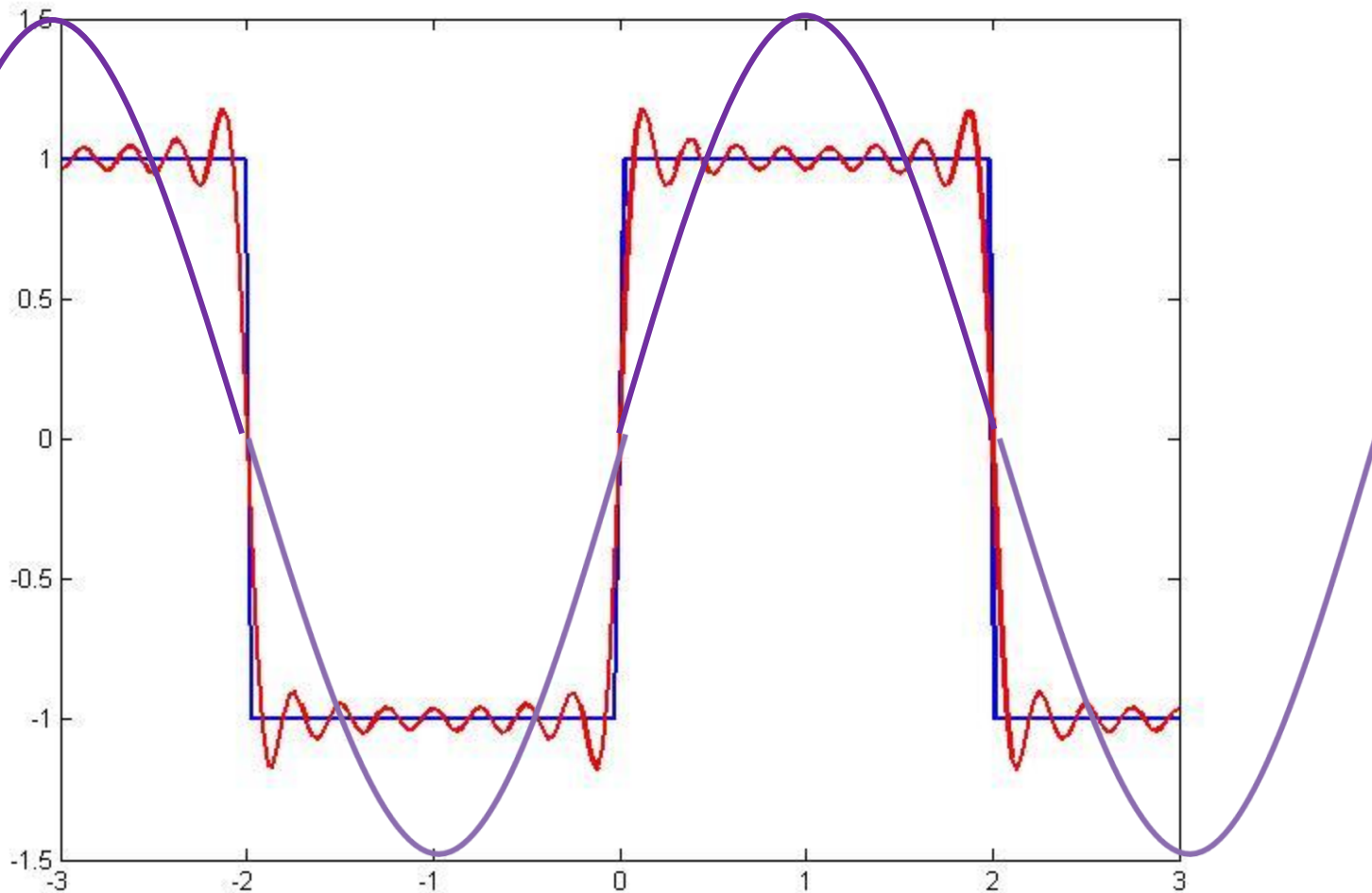
blir en koefficient t.ex. $a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(k\omega_0 t) dt$

stor om funktionen $f(t)$ harmoniserar med resp.
trigonometrisk funktion dvs. $\cos(k\omega_0 t)$



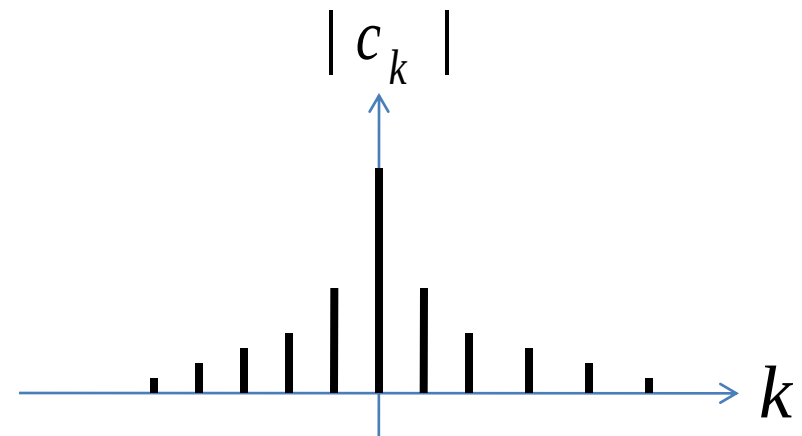
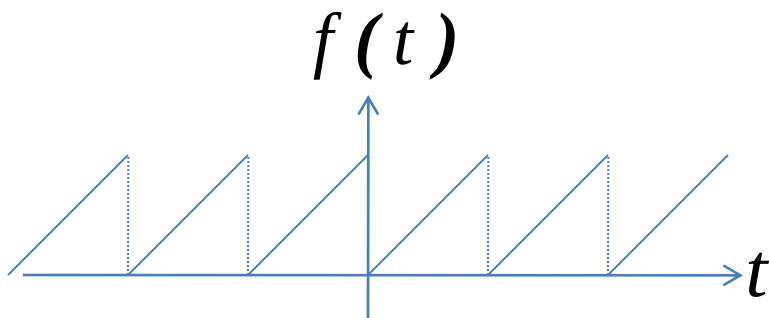
De sinus- och cosinus-funktioner som harmoniserar mest med funktionen ger alltså störst bidrag i serien

Ex.



$$\sum_{k=1}^{16} \frac{-2}{k\pi} ((-1)^k - 1) \sin(k \frac{\pi}{2} t)$$

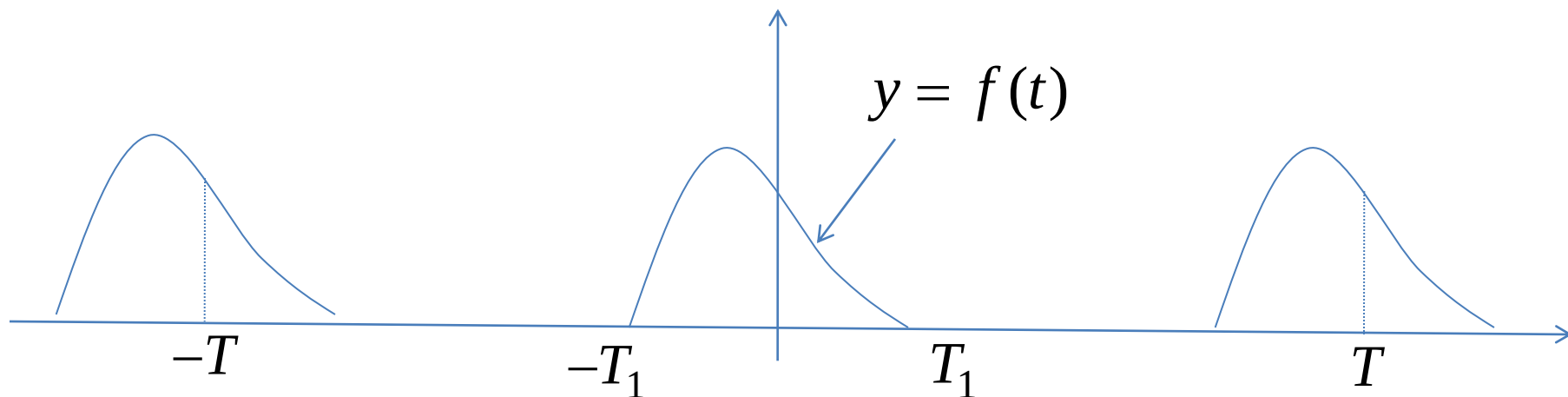
Vi kan betrakta en periodisk funktion som uppbyggd av egenfunktioner $e^{jk\omega_0 t}$ med olika frekvenser $k\omega_0$. Fourierseriekoeficienterna c_k ger information om hur mycket resp. egenfunktion bidrar med för att bygga upp funktionen. Man brukar prata om frekvensinnehållet i en funktion. Vi kan illustrera Frekvensinnehållet genom att rita ett s.k. amplitudspektrum



Låt $f(t)$ vara en kontinuerlig funktion med ändlig utsträckning dvs. sådan att $f(t) = 0$, då $|t| \geq T_1$

Betrakta då den funktion $\tilde{f}(t)$ som är periodisk med perioden T (där $T > 2T_1$) som är sådan att

$$\tilde{f}(t) = f(t), \text{ då } |t| < \frac{T}{2}$$



Vi kan då utveckla $\tilde{f}(t)$ i en Fourierserie med grundvinkelfrekvensen $\omega_0 = 2\pi / T$ dvs.

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

där

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Låt oss nu införa beteckningen

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{så att} \quad c_k = \frac{1}{T} F(jk\omega_0)$$

Sätter vi in detta uttryck för c_k i Fourierserien för $\tilde{f}(t)$ och betraktar t i intervallet $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ så får vi att

$$\begin{aligned} f(t) = \tilde{f}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \left[\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0}_{\text{Riemannsumma}} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \\ \text{då } \omega_0 \rightarrow 0 \\ \text{dvs. } T \rightarrow \infty \end{array} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

så

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

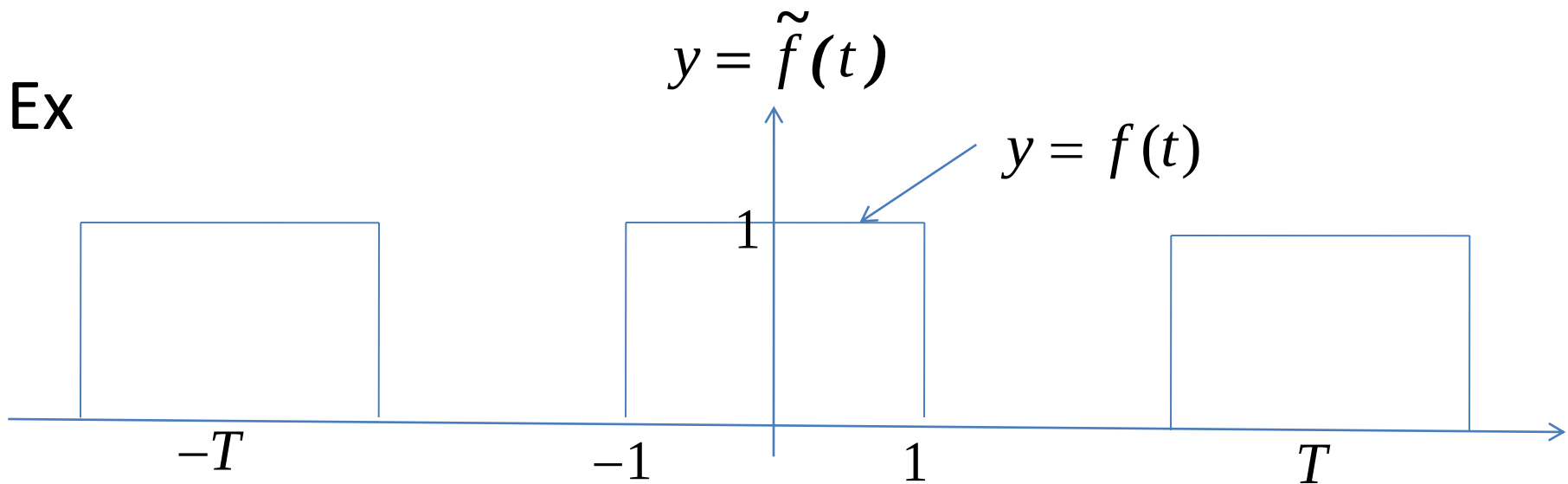
där

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$F(j\omega)$ kallas för **Fouriertransformen** av $f(t)$

Fouriertransformen existerar om $f(t)$ t.ex. är en absolutintegrerbar funktion med ändligt många diskontinuiteter. Se även Dirichletvillkoren på sidan 347 för något svagare villkor på funktionen $f(t)$

Ex

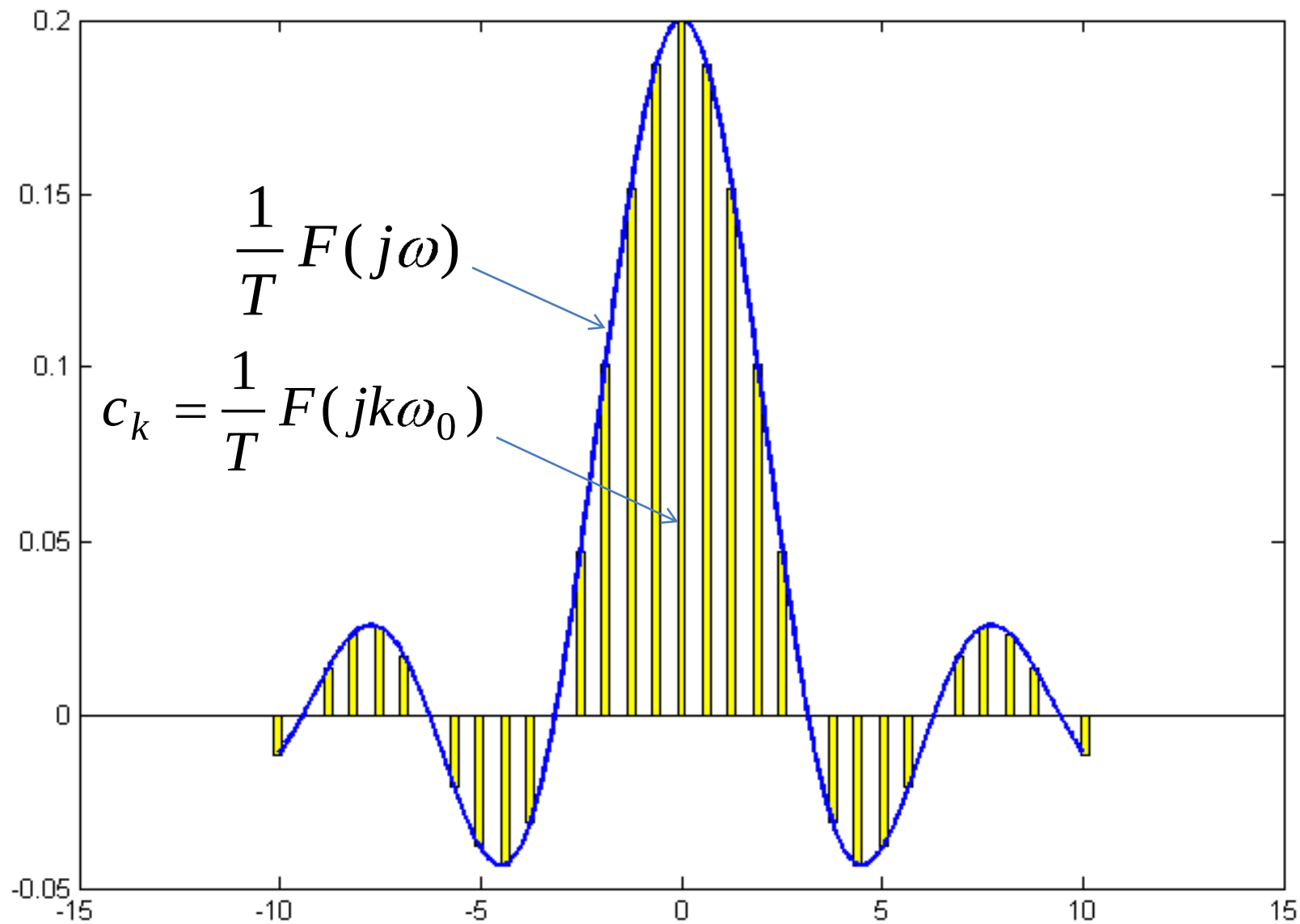


Fouriertransformen av $f(t)$ är

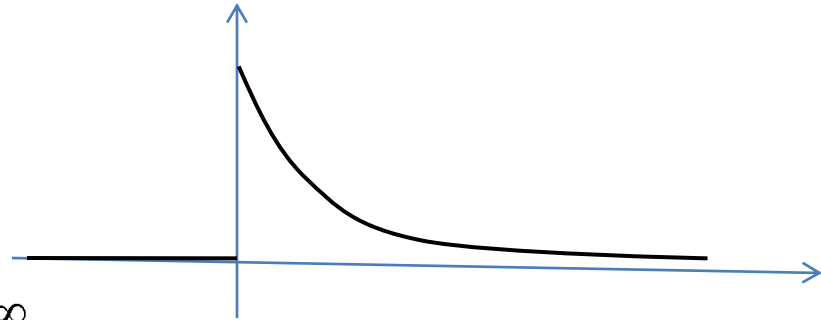
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{-1}^1 = \frac{j}{\omega} \left(e^{-j\omega} - e^{j\omega} \right) = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$$

och Fourierkoefficienterna för $\tilde{f}(t)$ är

$$c_k = \frac{1}{T} F(jk\omega_0) = \frac{1}{T} 2 \frac{\sin(k\omega_0)}{k\omega_0} = \frac{\sin(k\omega_0)}{\pi k}$$



Ex. $f(t) = e^{-t} H(t)$



$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt = \left[\frac{-1}{1+j\omega} e^{-(1+j\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} \underbrace{\left(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \right)}_{\text{udda imaginärdel}} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} \left(\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right) d\omega$$

$$f(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \frac{1}{1+\omega^2} \left(\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right) d\omega$$

