

Föreläsning 3

25 jan 2010

Om T är ett linjärt och tidsinvariant system (LTI-system) med impulssvaret $h(t)$ så vet vi sedan tidigare att

$$y = x * h$$

dvs utsignalen kan fås genom faltning av insignalen med impulssvaret.

Speciellt får vi att

$$T[e^{j\omega t}] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau =$$

$$= e^{j\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau}_{H(j\omega)} = H(j\omega) e^{j\omega t}$$

Om $h(t)$ är en reell funktion så får vi t.ex. att

$$\begin{aligned} T[\cos(t)] &= T[\operatorname{Re}[e^{jt}]] = \operatorname{Re}[T[e^{jt}]] = \\ &= \operatorname{Re}[H(j)e^{jt}] = a \cos(t) + b \sin(t) \end{aligned}$$

Pga att $T[e^{j\omega t}] = H(j\omega)e^{j\omega t}$

så säger vi att $e^{j\omega t}$ är **egenfunktioner** till systemet

Låt ω_0 vara ett fixt tal (grundvinkelfrekvensen)
Egenfunktionerna $e^{jk\omega_0 t}$ är samtliga periodiska
med perioden $T = 2\pi / \omega_0$

Eftersom systemet är linjärt så är det också lätt
att studera vad som händer med linjär-
kombinationer av sådana egenfunktioner.

$$\sum_k c_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{T} \sum_k c_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

Det är naturligt att fråga sig vilka funktioner som egentligen kan skrivas som en linjärkombination av dessa egenfunktioner.

Det visar sig att alla kontinuerliga funktioner $x(t)$ med perioden $T = 2\pi / \omega_0$ kan skrivas på formen

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Om vi multiplicerar båda led i identiteten

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

med $e^{-jn\omega_0 t}$ och integrerar över en period så får vi

$$\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt}_{\begin{cases} T, & \text{då } k=n \\ 0, & \text{då } k \neq n \end{cases}} = T c_n$$

Vilket ger oss en formel för att beräkna koefficienterna c_k . Speciellt följer det att koefficienterna c_k är entydigt bestämda.

Fourierserier

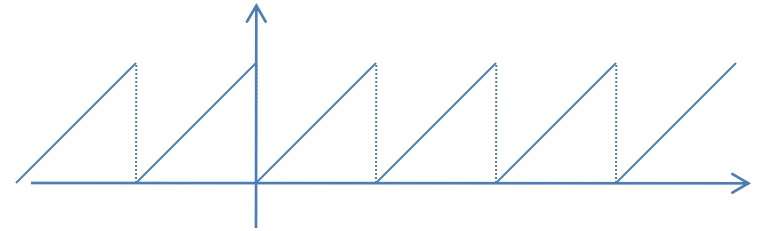
Givet en funktion $f(t)$ med perioden $T = 2\pi / \omega_0$
så säger vi att serien

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{där} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

är (den komplexa) **Fourierserien** till $f(t)$
och vi skriver

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ex.



$$\begin{cases} f(t) = t, 0 < t < 2 \\ f(t+2) = f(t), \text{ för alla } t \end{cases}$$

$$T = 2, \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^2 t e^{-jk\pi t} dt \stackrel{\substack{\downarrow \\ \text{P.I.} \\ \uparrow}}{=} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-jk\pi} t e^{-jk\pi t} \right]_0^2 + \underbrace{\dots}_{=0} = \frac{j}{k\pi}$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 t dt = \left[\frac{t^2}{4} \right]_0^2 = 1$$

så $f(t) \sim 1 + \sum_{k \neq 0} \frac{j}{k\pi} e^{jk\pi t}$

Om $f(t)$ är reell så är

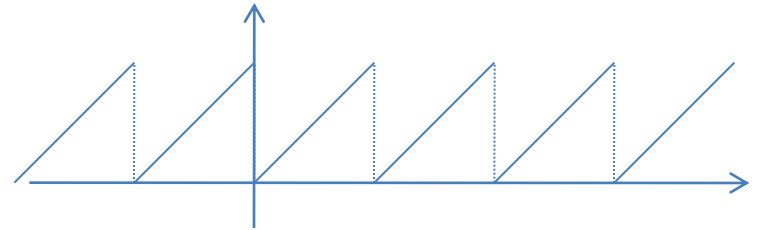
$$c_k^* = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{jk\omega_0 t} dt = c_{-k}$$

och därmed

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{jk\omega_0 t} + c_k^* e^{-jk\omega_0 t} \right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[c_k e^{jk\omega_0 t} \right] \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ 2c_k = a_k - jb_k \end{array} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \right] \end{aligned}$$

forts. Ex.

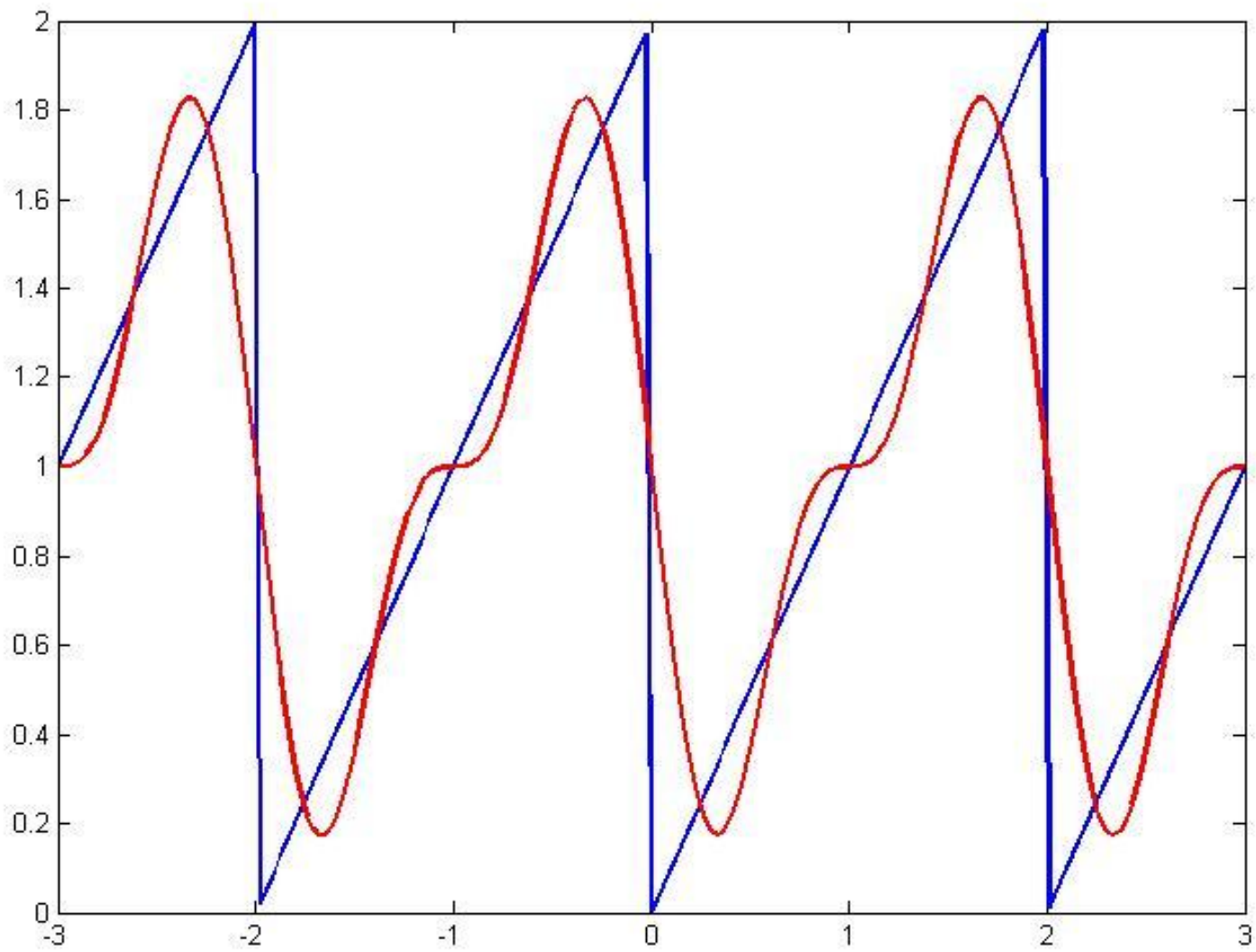
$$\begin{cases} f(t) = t, 0 < t < 2 \\ f(t+2) = f(t), \text{ för alla } t \end{cases}$$



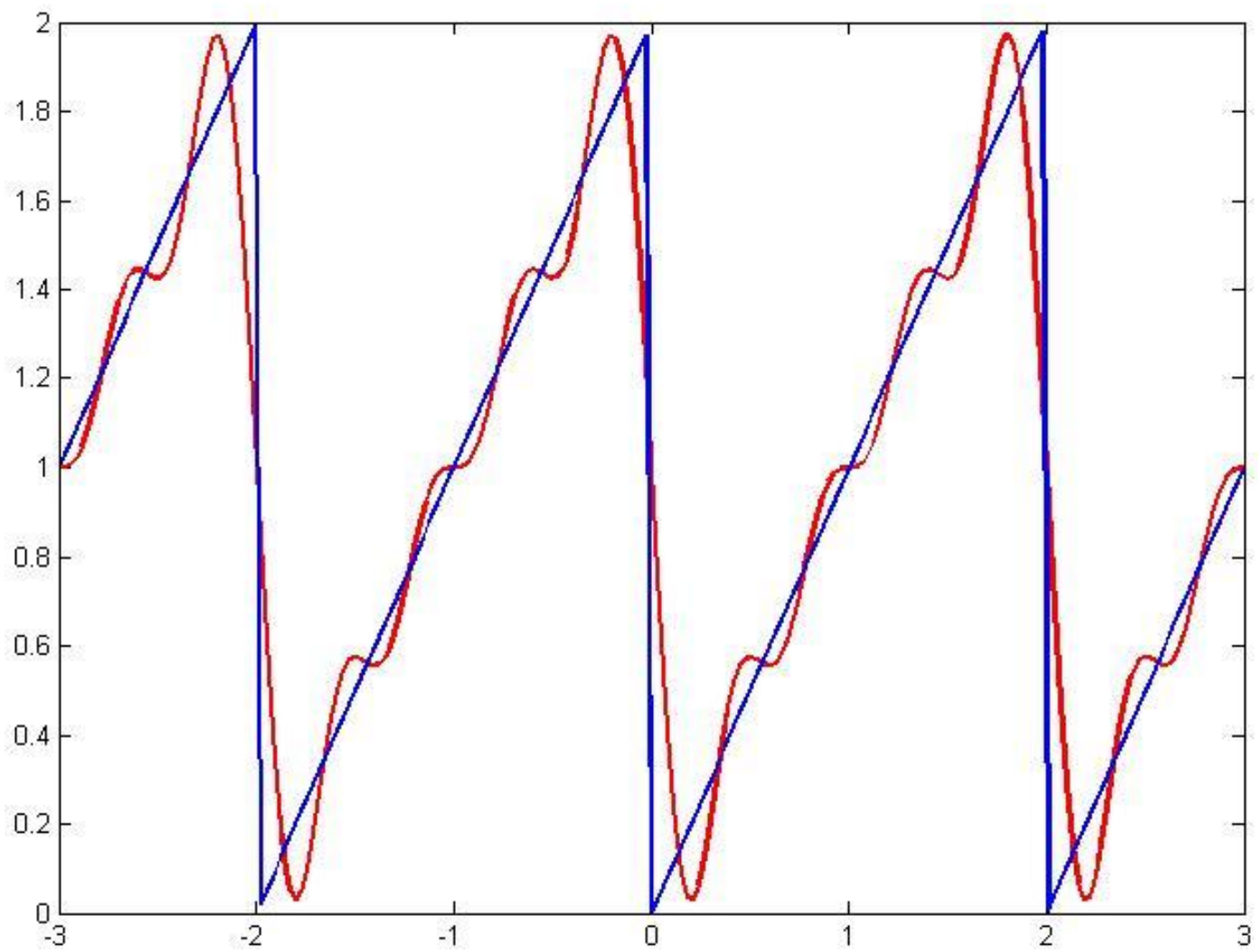
$$2c_k = \frac{2j}{k\pi} = a_k - jb_k \quad \Rightarrow \quad a_k = 0, b_k = \frac{-2}{k\pi}$$

$$f(t) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k\pi} \sin(k\pi t) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k\pi t)$$

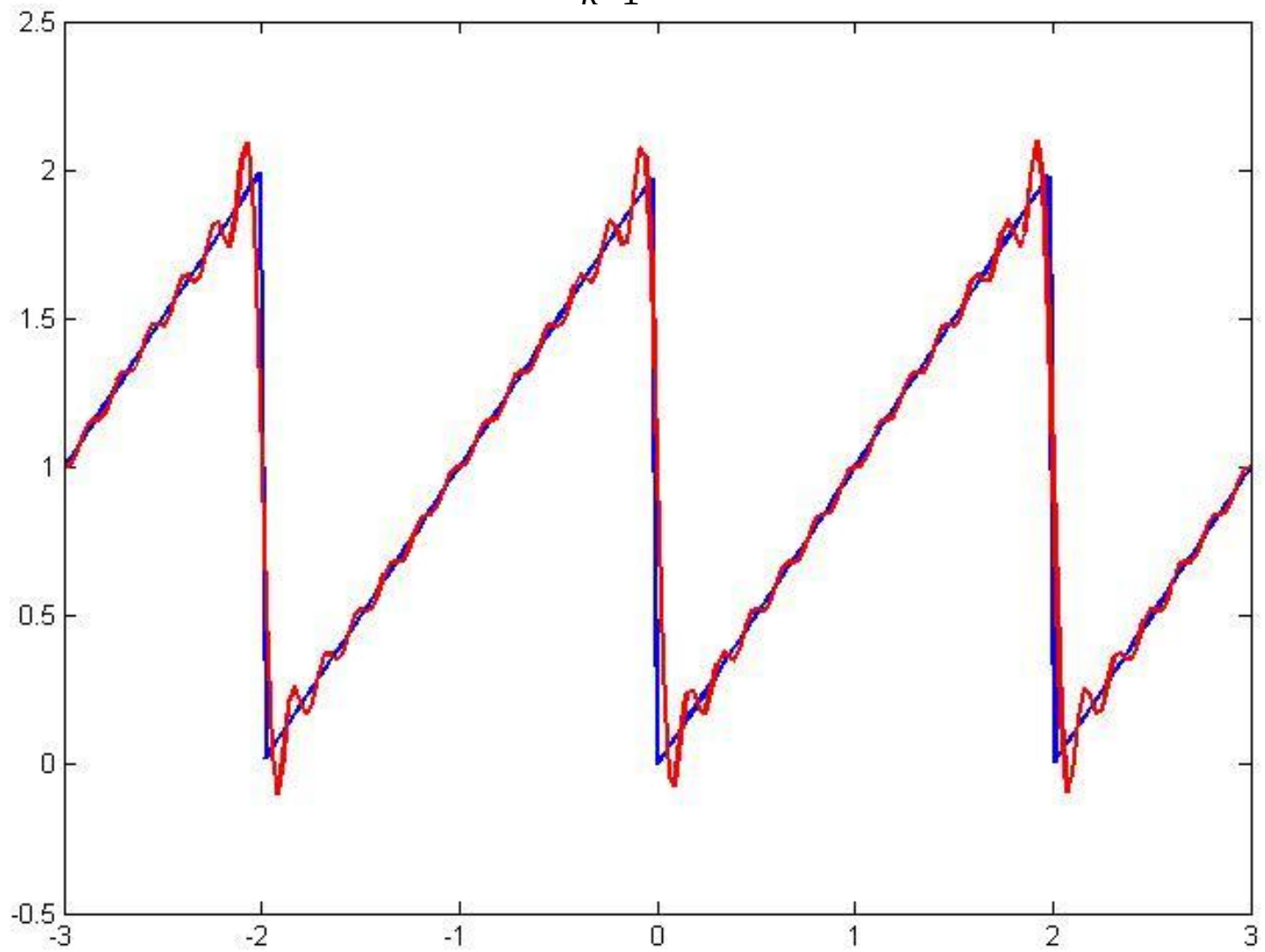
$$1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} \sin(k\pi t)$$



$$1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} \sin(k\pi t)$$



$$1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{k} \sin(k\pi t)$$



Man kan naturligtvis beräkna den reella
Fourierserieutvecklingen direkt utan att gå via
den komplexa Fourieserien. Vi får då att

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

där
$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

Konvergens av Fourierserier

Man kan visa att om $f(t)$ är begränsad och deriverbar, utom i ett ändligt antal punkter, i varje intervall av periodlängd så är

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

I alla punkter t där funktionen är deriverbar.

Om funktionen är diskontinuerlig i t så

konvergerar Fourierserien mot $\frac{1}{2} [f(t^+) + f(t^-)]$

Se även Dirichlet-villkoren i boken sid 286 för något svagare villkor för konvergens av Fourierserier.

Konvergenshastigheten beror på regulariteten hos $f(t)$.
T.ex. är Fourierkoefficienterna av storleksordningen $1/n$ om $f(t)$ är diskontinuerlig i någon punkt,
medan de är av storleksordningen $1/n^2$ om $f(t)$ är kontinuerlig överallt.

Om alla derivator upp till r :te ordningen är kontinuerliga så är Fourierkoefficienterna av storleksordningen $1/n^{r+2}$

Jämna och udda funktioner

Om $f(t)$ är en jämn funktion så får vi att

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{jämn}} \underbrace{\sin(k\omega_0 t)}_{\text{udda}} dt = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{udda}}$

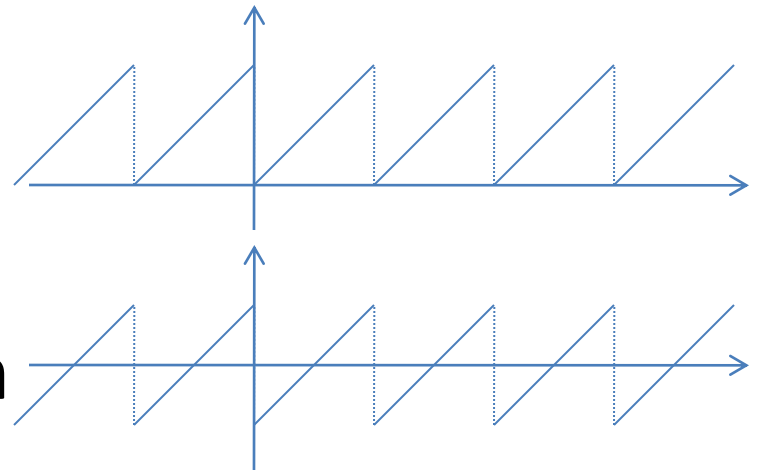
Så Fourierserien består enbart av cosinus-termer

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t)$$

På liknande sätt ser vi Fourierserien till en udda funktion bara innehåller sinus-termer dvs.

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

Ex. $\begin{cases} f(t) = t, 0 < t < 2 \\ f(t+2) = f(t), \text{ för alla } t \end{cases}$



$f(t) - 1$ är en udda funktion

så vi måste ha

$$f(t) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

Vilket stämmer med tidigare kalkyler

Givet en funktion $f(t)$ som bara är definierad på ett intervall $[0, T]$ så kan vi definiera den periodiska utvidgningen $\phi(t)$ som är sådan att

$$\begin{cases} \phi(t) = f(t), & 0 < t < T \\ \phi(t+T) = \phi(t), & \text{för alla } t \end{cases}$$

$\phi(t) = f(t)$

Då kommer Fouriersserien för $\phi(t)$ att konvergera mot $f(t)$ i alla kontinuitetspunkter på intervallet $[0, T]$

Ex.
$$t = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k\pi t) \quad , \quad 0 < t < 2$$

t.ex. är

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \Rightarrow \pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Om man vill kan man först utvidga $f(t)$ till en jämn funktion på intervallet $\llbracket T, T \rrbracket$ och därefter utvidga denna jämna funktion till en periodisk funktion med perioden $2T$. Den erhållna Fourier-serien kommer då att bli en ren cosinusserie och speciellt är

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) \quad , \quad 0 < t < T$$

Genom att istället utvidga till en udda funktion så får vi att

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \quad , \quad 0 < t < T$$

Ex. Antag att vi vill utveckla $f(t) = t$ i en ren cosinusserie på intervallet $0 < t < 2$.

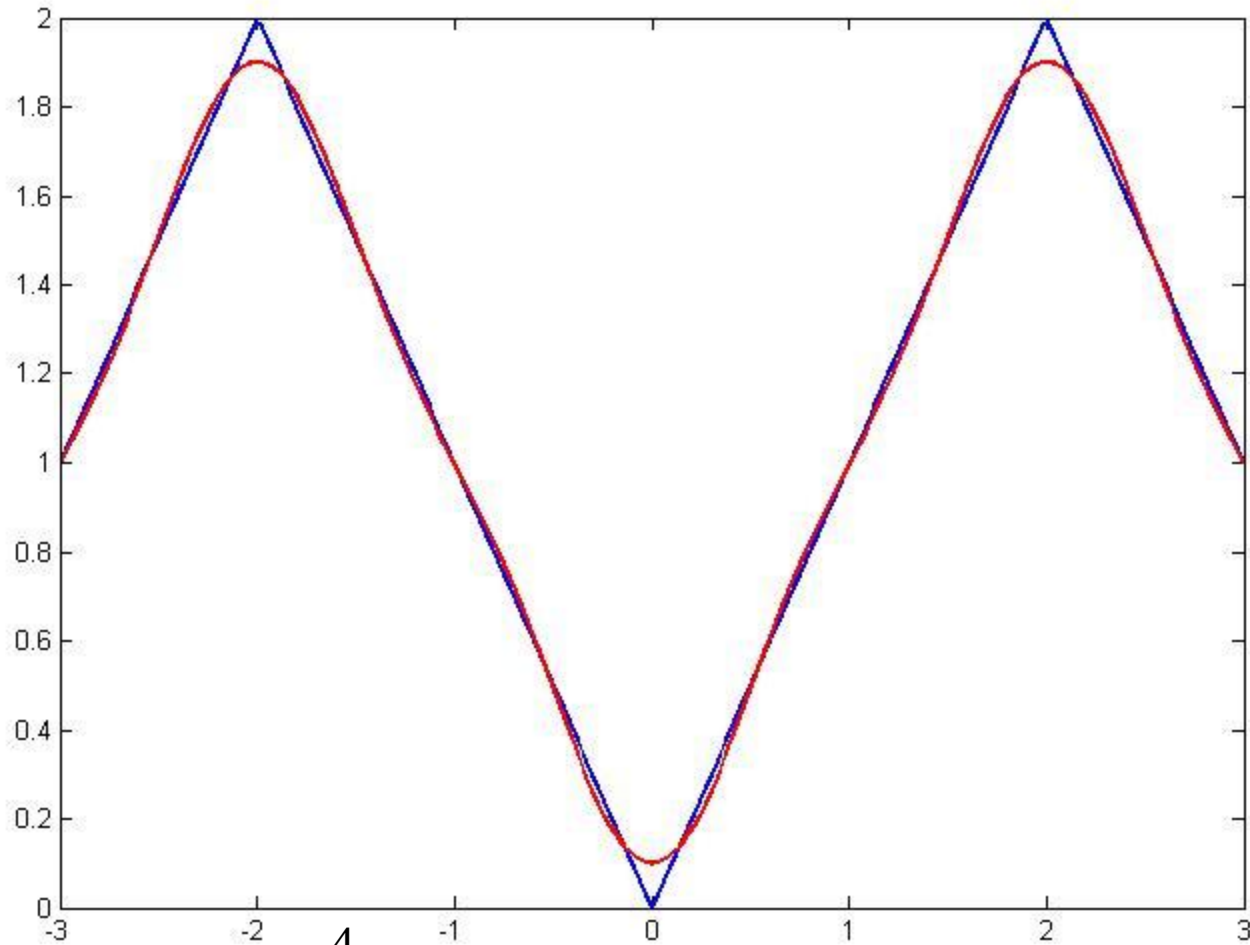
Betrakta då den periodiska funktionen $\phi(t)$ där

$$\begin{cases} \phi(t) = t, & 0 < t < 2 \\ \phi(t) = -t, & -2 < t < 0 \\ \phi(t+4) = \phi(t), & \text{för alla } t \end{cases}$$

Vi får att

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2T} \int_{-T}^T \phi(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \phi(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \\ &= \int_0^2 t \cos\left(k \frac{\pi}{2} t\right) dt = \dots = \frac{4}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1), \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

så
$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1) \cos(k \frac{\pi}{2} t) \quad , 0 < t < 2$$



$$1 + \sum_{k=1}^4 \frac{4}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1) \cos(k \frac{\pi}{2} t)$$

Derivering av Fourierserier

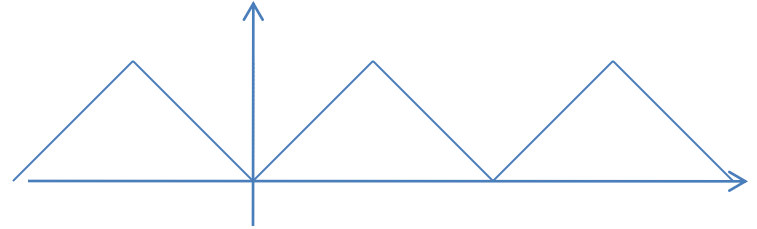
Om $f(t)$ är en periodisk och begränsad funktion sådan att $f'(t)$ är styckvis deriverbar så kan vi derivera Fourierserien för $f(t)$ termvis och få att

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[b_k k \omega_0 \cos(k \omega_0 t) - a_k k \omega_0 \sin(k \omega_0 t) \right]$$

i alla punkter där $f''(t)$ existerar

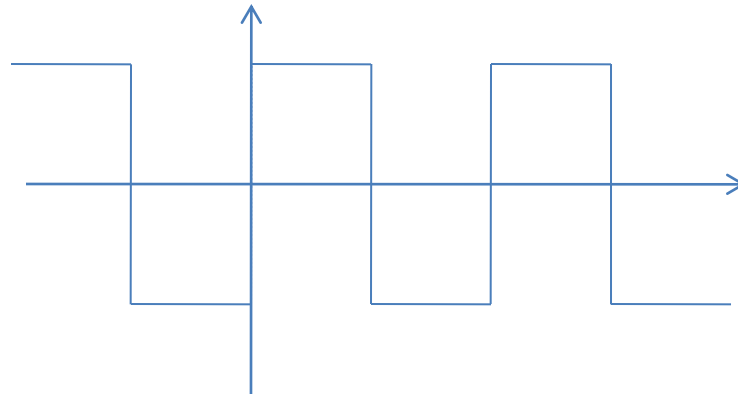
Ex.

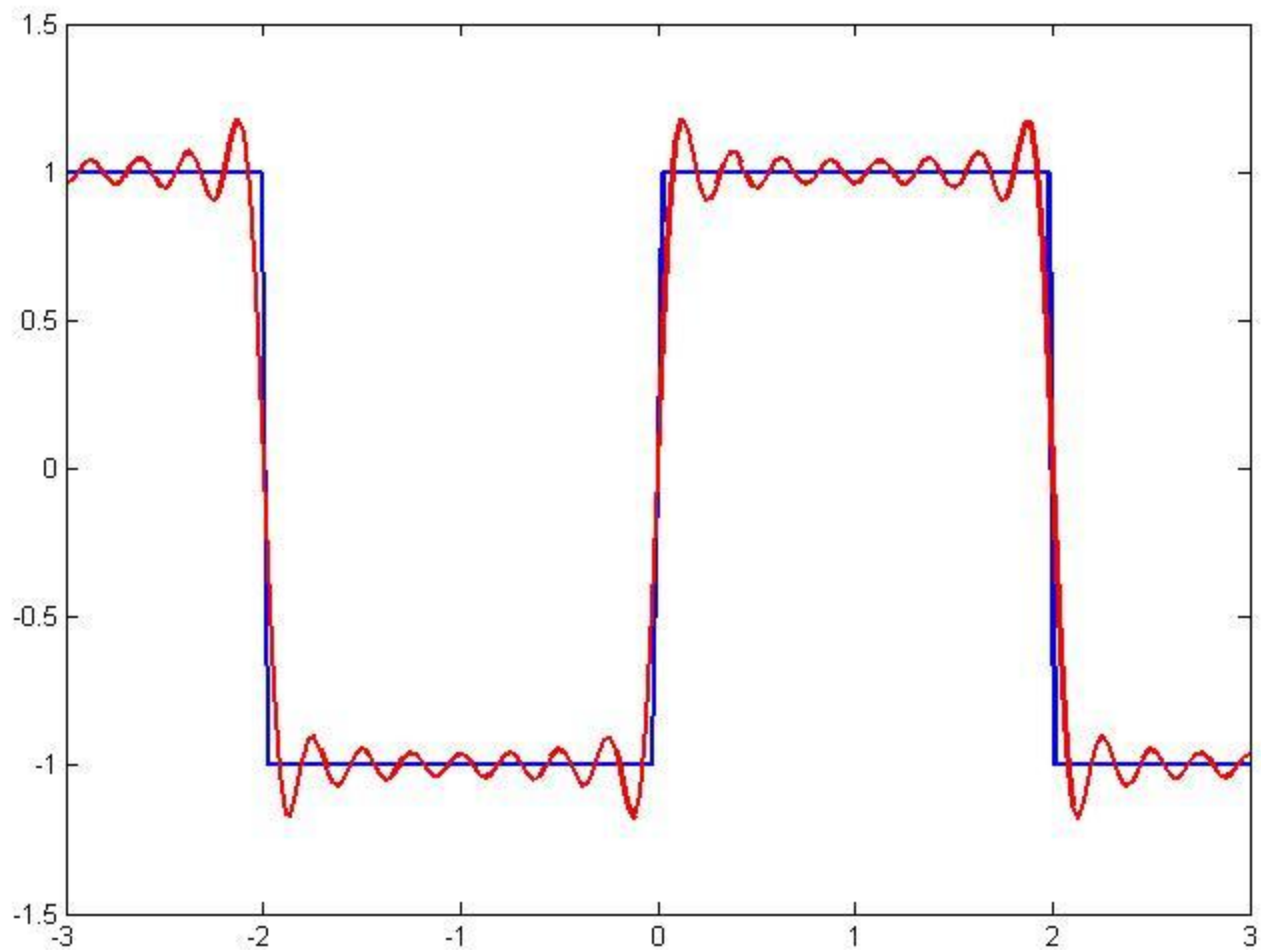
$$\begin{cases} \phi(t) = t, & 0 < t < 2 \\ \phi(t) = -t, & -2 < t < 0 \\ \phi(t+4) = \phi(t), & \text{för alla } t \end{cases}$$



$$\phi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1) \cos(k \frac{\pi}{2} t)$$

$$\phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k\pi} ((-1)^k - 1) \sin(k \frac{\pi}{2} t)$$





$$\sum_{k=1}^{16} \frac{-2}{k\pi} ((-1)^k - 1) \sin(k \frac{\pi}{2} t)$$

- Multiplikationssatsen...
- Parsevals formel ...
- Bessels olikhet (uppskattning av felet)...