Föreläsning 5

1 feb 2010

Om $f(t)$ är en absolutintegrerbar funktion på $(-\infty, \infty)$ dvs om $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ så definierar vi Fouriertransformen av $f(t)$ enl;

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Fouriertransformen existerar även under något svagare villkor på $f(t)$.

Vi kan återfå funktionen $f(t)$ genom följande s.k. principalvärdesintegral;

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Som vi sett så kan denna representationsformel tolkas som motsvarigheten till Fourierserier för icke-periodiska funktioner.

Samband mellan Laplacetransform och Fouriertransform

Vi har tidigare definierat den ensidiga Laplacetransformen;

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Om man vill studera system där signalerna $x(t)$ inte nödvändigtvis är 0 för $t < 0$ så kan vi istället använda den tvåsidiga Laplacetransformen;

$$F(s) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-st}dt$$

De komplexa tal s för vilket denna integral existerar utgör det s.k. konvergensområdet (ROC) för Laplacetransformen. Om imaginäraxeln ingår i ROC så existerar även Fouriertransformen;

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Laplacetransformen existerar alltså för fler signaler än de för vilket Fourietransformen existerar. Det speciella intresset för Fouriertransformen beror framför allt på dess betydelse vid studier av stabila LTI-system T där signalerna naturligt är uppbyggda av sinussvängningar. Mer specifikt så gäller ju att;

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_o) e^{jk\omega_0 t}$$

där $H(jk\omega_0)$ är systemets frekvenssvar dvs. Fouriertransformen av systemets impulssvar $h(t)$. Man kan visa att stabiliteten garanterar att $H(j\omega)$ existerar.

Många system är konstruerade för att förändra frekvensinnehållet i signaler t.ex. filtrera bort eller förstärka vissa delar genom att låta $|H(\omega)|$ vara liten eller stor för motsvarande frekvenser $\omega = k\omega_0$.

Några viktiga egenskaper hos Fouriertransformen

$f(t)$	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$f(t-\tau)$	$(-jt)^k f(t)$	$f^{(n)}(t)$
$F(j\omega)$	$F(j(\omega-\omega_0))$	$e^{-j\omega\tau}F(j\omega)$	$\frac{d^k}{d\omega^k}F(j\omega)$	$(j\omega)^n F(j\omega)$

$f(t)$	$af(t)+bg(t)$	$f(at)$	*Duala egenskapen*
$F(j\omega)$	$aF(j\omega)+bG(j\omega)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{j\omega}{a})$	

T.ex.

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = F(j(\omega-\omega_0))$$

$$-jtf(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} -jtf(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{d}{d\omega} \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{d}{d\omega} F(j\omega)$$

$$f'(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt \underset{\substack{\uparrow \\ P.I.}}{=} \left[f(t) e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega F(j\omega)$$

$f(t)e^{-j\omega t} \rightarrow 0$, $då\ t \rightarrow \pm\infty$ ty $f(t)$ är absolutintegrerbar

Vi har tidigare sett att Fouriertransformen av

$$f(t) = H(1 - |t|) = \begin{cases} A, \text{ då } |t| \leq 1 \\ 0, \text{ då } |t| > 1 \end{cases} \quad \text{är } F(j\omega) = 2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

och att Fouriertransformen av

$$f(t) = e^{-t}H(t) = \begin{cases} e^{-t}, \text{ då } t \geq 0 \\ 0, \text{ då } t < 0 \end{cases} \quad \text{är } F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Utifrån dessa transformpar och Fouriertransformens egenskaper kan vi härleda en stor klass andra transformpar;

Ex: $x(t) = e^{-|t|}$ kan skrivas $x(t) = f(t) + f(-t)$, där $f(t) = e^{-t}H(t)$. Vi vet att fouriertransformen av $f(t)$ är $\frac{1}{1+j\omega}$ så linjäritet och skalningsegenskapen ger att $x(t)$ har Fouriertransformen;

$$X(j\omega) = F(j\omega) + F(-j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} + \frac{1}{1 - j\omega} = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

Några transformer

$f(t)$	$t^n e^{-at} H(t)$ $a > 0$	$\begin{cases} A, \; då \; \lvert t \rvert \leq T \\ 0, \; då \; \lvert t \rvert > T \end{cases}$	$e^{-a\lvert t \rvert}$ $a > 0$
$F(j\omega)$	$\dfrac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$	$2AT\operatorname{sinc}(\omega T)$	$\dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$

där $\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & då \; x \neq 0 \\ 1, & då \; x = 0 \end{cases}$

Några generaliserade Fouriertransformer

$$\underline{\delta(t-t_0)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = \underline{e^{-j\omega t_0}}$$

$$\underline{1} \overset{\substack{\epsilon\to 0\\ \downarrow}}{\longleftarrow} e^{-\epsilon|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\epsilon}{\epsilon^2+\omega^2} = \underbrace{\left(\frac{2\epsilon}{\epsilon^2+\omega^2}\frac{1}{2\pi}\right)}_{\delta}2\pi \overset{\substack{\epsilon\to 0\\ \downarrow}}{\longrightarrow} \underline{2\pi\delta(\omega)}$$

Detta stämmer med vad inversionsformeln ger;

$$2\pi\delta(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = 1$$

Använder vi förskjutningsregeln $e^{j\omega_0 t}f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j(\omega-\omega_0))$ för $f(t)=1$ så får vi;

$$\underline{e^{j\omega_0 t}} = e^{j\omega_0 t}\cdot 1 \xrightarrow{\mathcal{F}} \underline{2\pi\delta(\omega-\omega_0)}$$

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}}_{\text{Fourierserie}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \underbrace{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0)}_{\text{impulståg}}$$

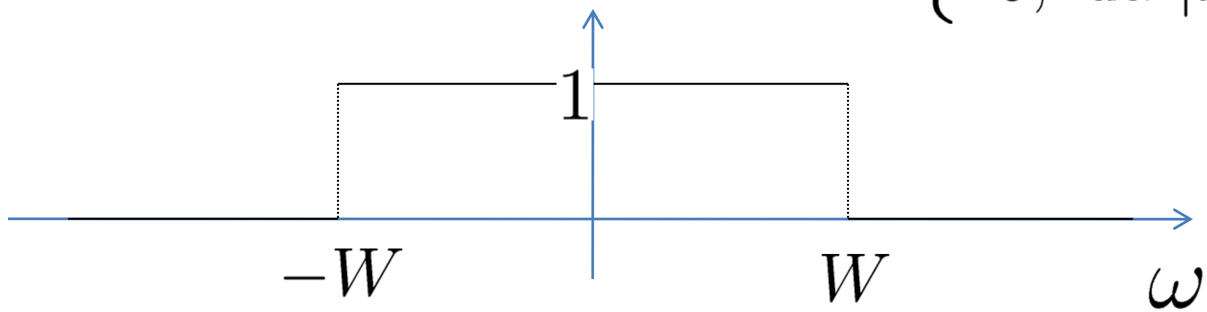
Ex: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ är ett periodiskt impulståg med perioden T och vars Fourierseriekoefficienter är;

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

så

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

Ex: Låt oss bestämma den funktion $f(t)$ vars Fourier-transform är $F(j\omega) = H(W - |\omega|) = \begin{cases} 1, & \text{då } |\omega| < W \\ 0, & \text{då } |\omega| \geq W \end{cases}$



Observera att;

$$tf(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\frac{d}{d\omega}F(j\omega) = j(\delta(\omega + W) - \delta(\omega - W))$$

och

$$\frac{j}{2\pi}(e^{-jWt} - e^{jWt}) \xrightarrow{\mathcal{F}} j(\delta(\omega + W) - \delta(\omega - W))$$

så

$$f(t) = \frac{j}{2\pi t}(e^{-jWt} - e^{jWt}) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

Alternativt kan vi använda inversionsformeln för att erhålla $f(t)$ från $F(j\omega)$;

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-W}^{W} = \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

Fouriertransform av faltning

$$f * g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega)G(j\omega)$$

$$f * g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega (t+\tau)} dt \right) d\tau =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt \right) =$$

$$= F(j\omega)G(j\omega)$$

Om T är ett <u>stabilt</u> LTI-system med impulssvar $h(t)$ så är;

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

vilket garanterar att dess Fouriertransform $H(j\omega)$ existerar.

Om $x(t)$ är en insignal med Fouriertransform $X(j\omega)$ så kommer Fouriertransformen $Y(j\omega)$ av motsvarande utsignal $y(t)$ också existera och

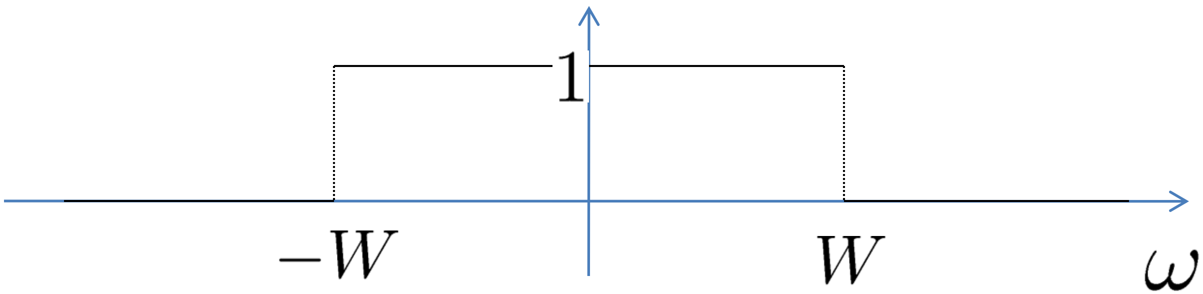
$$y(t) = h * x(t) \quad \Rightarrow$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Detta samband kan t.ex. användas för att konstruera system vars uppgift är att sålla bort oönskade frekvenser i en signal $x(t)$. Sådana system kallas för filter.

System med frekvenssvar av typen;

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{då } |\omega| < W \\ 0, & \text{då } |\omega| \geq W \end{cases}$$



kallas för idealiska lågpassfilter

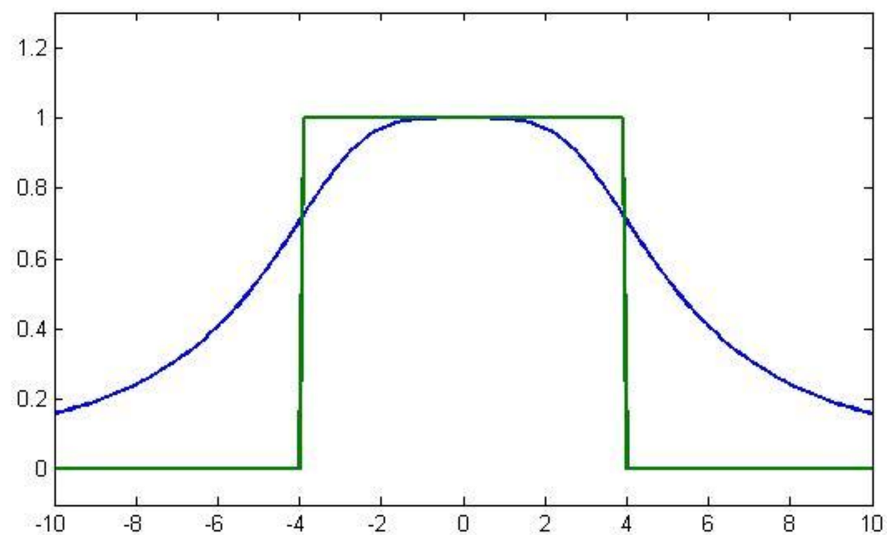
I praktiken kan man inte konstruera sådana filter utan man får nöja sig med approximationer.
Vanligen approximerar man då filtret med lämplig rationell funktion, vilket motsvarar system som beskrivs av differentialekvationer. Sådana system kan konstrueras med kända komponenter. Butterworth-filter är exempel på sådant approximativt bandpass-filter (se avs. 5.7)

Ex: Differentialekvationen $\frac{1}{16}(y'' + 4\sqrt{2}y' + 16y) = x$
beskriver sambandet mellan insignal $x(t)$ och utsignal $y(t)$
för ett andra ordningens Butterworthfilter som har för avsikt
att approximera det idealiska lågpassfiltret med frekvenssvaret;

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{då } |\omega| < 4 \\ 0, & \text{då } |\omega| \geq 4 \end{cases}$$

Butterworthfiltret har frekvenssvaret;

$$H_B(j\omega) = \frac{16}{-\omega^2 + 4\sqrt{2}j\omega + 16}$$

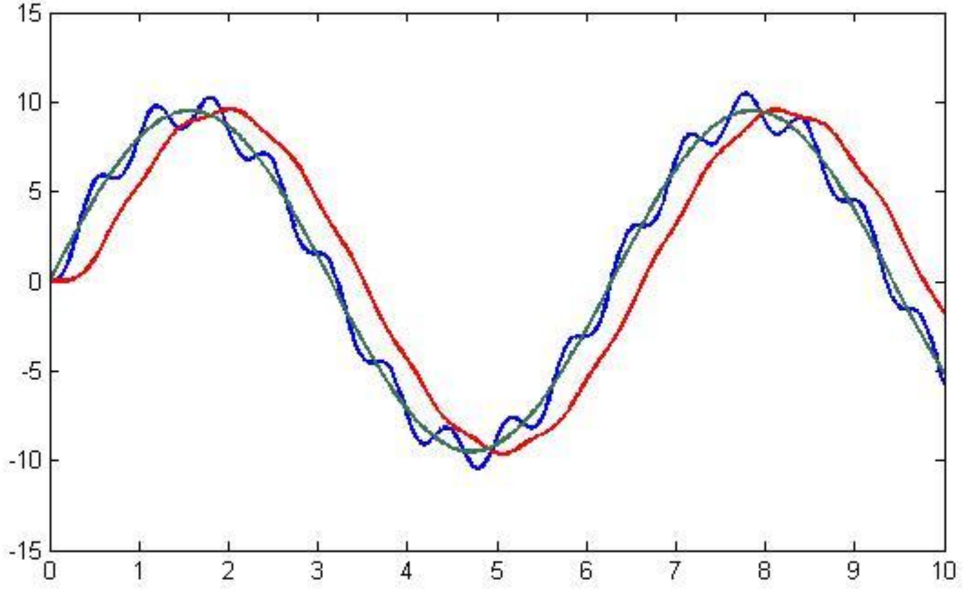


Insignalen $\quad x(t) = 9.5 \sin t - \sin(9.5t)$

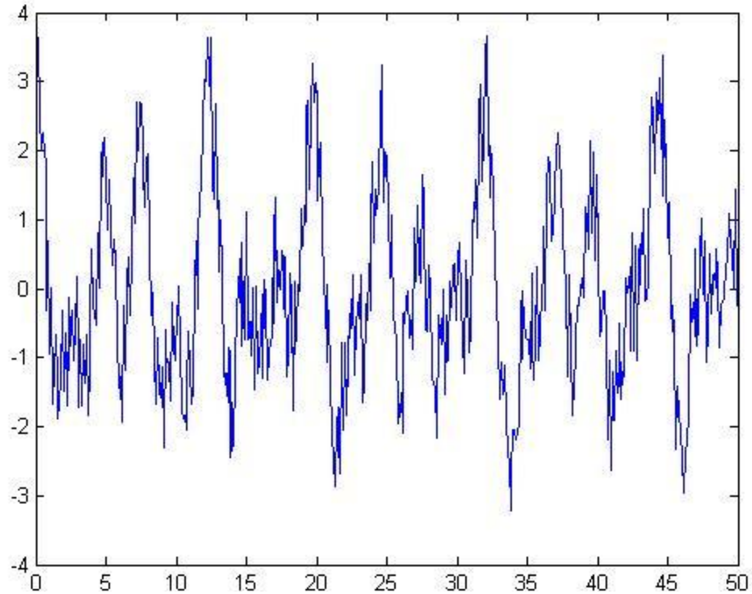
kommer att resultera i utsignalen

$$y(t) \approx 9.48 \sin(t - 0.36) + 0.17 \sin(9.5t + 0.63) +$$
$$+3.26 e^{-2.83t} \sin(2.83t + 1.68)$$

Vi ser att den första termen i stort sett bara förskjuts medan den andra termen dämpas kraftigt. Den tredje s.k. trancienta termen är i stort sett försumbar, utom för mycket små värden på t.

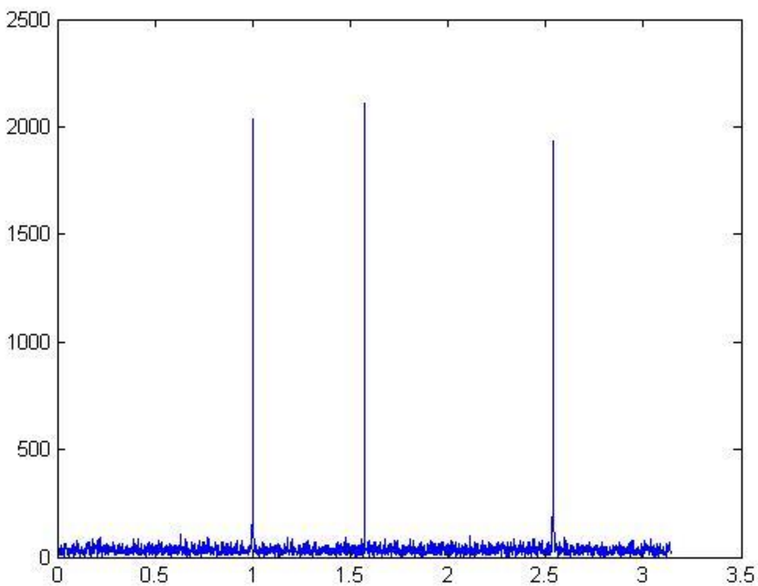


Sampling



$$\cos(at) + \cos(bt) + \cos(ct) +$$

$$+ \underbrace{\text{störning}}_{<2}$$



FFT med steglängden 1
och 2^{12} samplade värden

Vi avläser att
$a \approx 0.9986, b \approx 1.5693, c \approx 2.5372$
De ursprungliga värdena var
$a = 1, b = \pi/2 = 1.5708...,$
$c = 33/13 = 2.5385...$