

Transformer och differentialekvationer M3 2009/2010

Till uppgifterna kan valfri symbolhanterande programvara användas, exempelvis Matlab med Symbolic Math Toolbox, Mathematica eller Maple. För en inledning till Mathematica, se

<http://www.math.chalmers.se/~soderst/Mathematica5/Kompendiet.pdf>

Det är tillåtet att samarbeta, men redovisningen sker individuellt. Den skriftliga redovisningen skall inte bestå av en utskrift av datorkommandon, utan en sammanhängande text som förklarar hur uppgiften lösts och vad man lärt sig av den. Man skall även vara beredd på att förklara detaljer i lösningen muntligt.

Inlämningsuppgift 1

Inlämnas senast torsdag 4/2

1. Definiera funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 2 \\ \frac{t^2}{4}, & 2 \leq t < 5 \\ t \sin t, & t \geq 5 \end{cases}$$

Skriv $f(t)$ som ett enda uttryck med hjälp av språngfunktionen $H(t)$. Beräkna $f'(t)$ både för hand och med dator. Plotta funktionen för $0 \leq t \leq 15$.

2. Beräkna Laplacetransformen av $f(t)$.

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x = f(t) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

med Laplacetransformering (använd gärna dator till räkningarna, men redovisa så att lösningsgången kan följas). Plotta lösningen för $0 \leq t \leq 15$.

4. Lös samma ekvation direkt med symbolhanterande programvara och jämför.

Anmärkning: Enligt Series and Transforms sid 133 kan kommandot `dsolve` i Matlab Symbolic Toolbox ej hantera denna typ av ekvationer. Nyare versioner verkar dock klara detta.

5. Lös följande system av differentialekvationer dels direkt med symbolhanterande programvara, dels med Laplacetransformering:

$$\begin{cases} 5x'' + y'' + 20x + 4y = \delta(t) \\ 4x'' + y'' + 16x + 5y = 0 \\ x(t) = y(t) = 0 \quad \text{om } t < 0 \end{cases}$$

Villkoret $x(t) = y(t) = 0$ om $t < 0$ blir uppfyllt om man föreskriver byggnelsevillkoren $x(t_0) = x'(t_0) = y(t_0) = y'(t_0) = 0$ för något $t_0 < 0$, t.ex. $t_0 = -1$.

6. Beräkna Laplacetransformen av $|\sin t|$.

7. (Överbetygsuppgift.) Hur kan man lösa ekvationen

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x = |\sin t| \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

för $0 \leq t \leq 15$? Kan Laplacetransform användas? `dsolve`?