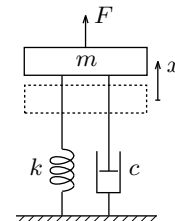


Transformer och differentialekvationer för M3 2010

Inlämningsuppgift 2. Svängningar. Inlämningsdatum 18/2.

1. Betrakta den endimensionella svängningsekvationen $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$, där m är den svängande partikelns massa, k är fjäderkonstanten, c är dämpningskonstanten, och F är den drivande kraften. Lägeskoordinaten x mäter avvikelsen från jämviktsläget (se figur). Betrakta svängaren som ett system med F som insignal och x som utsignal. Uppgiften är att beräkna utsignalen för några olika typer av insignaler. Låt $m = 1$ och välj c och k i intervallen $0.2 \leq c \leq 0.9$, $3 \leq k \leq 10$.



a. Om kraften är periodisk finns en unik periodisk lösning (steady state solution). Antag att $F(t) = |\cos \pi t|$. Bestäm motsvarande periodiska lösning $x(t)$ genom att utveckla $F(t)$ och $x(t)$ i Fourierserie. Bestäm en Fourier-approximation $\tilde{F}$ till F genom att ta med så många termer att $\int_0^1 [\tilde{F}(t) - F(t)]^2 dt < 10^{-5}$ (använd Parsevals formel till feluppskattningen). Tag med lika många termer i utvecklingen av $x(t)$ och plotta resultatet för (t.ex.) $-2 \leq t \leq 2$.

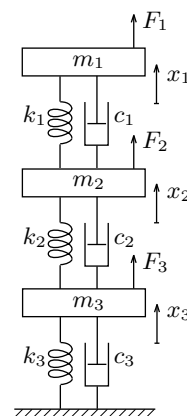
b. Låt $F(t) = e^{-|t|} \sin t$, och lös systemet med Fouriertransform. Hur kan den lösning du hittar karakteriseras? Plotta resultatet för $-5 \leq t \leq 10$.

c. (Överbetygsuppgift) Bestäm lösningen då

$$F(t) = \begin{cases} e^{-|t|} \sin t, & t < 0, \\ |\cos \pi t|, & t > 0, \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $x(0) = x'(0) = 0$. Plotta lösningen för $-5 \leq t \leq 15$.

2. Tre kroppar med massorna m_1 , m_2 och m_3 är kopplade till varandra och till omgivningen via fjädrar och viskösa dämpare enligt figur. Ställ upp detta dynamiska systems rörelseekvation (se avsnitt 4.7 i kompendiet). De värden på massor och fjäder- och dämpningskonstanter som du skall använda finner du i ditt personnummer (med nollor ersatta av 10:or): $m_1 m_2 m_3 k_1 k_2 k_3 - (20c_1)(20c_2)(20c_3) *$. Dämpningen uppfyller alltså $0.05 \leq c_i \leq 0.5$. Vi skall pröva några olika metoder att lösa detta system.



3. Bestäm motsvarande odämpade, homogena systems egenvinkelfrekvenser och egenvektorer med hjälp av dator. Utnyttja detta för att ange de tre massornas fria svängningar. Bestäm lösningen då $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, $x'_1(0) = 0$, $x'_2(0) = 0$, $x'_3(0) = 0$. Rita grafer till denna för $0 \leq t \leq 50$.

4. Gör om det odämpade och det dämpade, homogena systemet till första ordningens system av differentialekvationer på formen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Bestäm egenvärden och egenvektorer till de två koefficientmatriserna. Vilket samband gäller mellan egenvärdena och egenvektorerna till det odämpade systemet i deluppgift 3 och i denna deluppgift? Bestäm även nu lösningarna då $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, $x'_1(0) = 0$, $x'_2(0) = 0$, $x'_3(0) = 0$. Rita graferna för $0 \leq t \leq 50$ och jämför med tidigare resultat.

5. Ett annat sätt att bestämma lösningen till ett homogent system av linjära första ordningens differentialekvationer $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ är med hjälp av exponentialfunktionen för matriser. Skriv en funktionsfil för beräkning av $e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}(0)$ på ett intervall $[0, t_1]$. Invariabler bör vara matrisen $\mathbf{A}$, sluttidpunkten t_1 , begynnelsevärdet $\mathbf{x}(0)$ samt antalet punkter i indelningen av $[0, t_1]$. (Beräkning av $e^{\mathbf{A}}$ finns inbyggd i Matlab, kommandot är `expm(A)`.) Utvariabler bör vara en vektor t av tidpunkter och lösningen $\mathbf{x}$ för motsvarande t -värden. Lösningsskurvorna plottas sedan radvis med `plot(t, x(i, :))`. Utnyttja denna metod för att lösa det odämpade resp. dämpade systemet. Plotta de tre massornas lägen och hastigheter med begynnelsevärden enligt ovan. Jämför med tidigare resultat.

6. Av graferna framgår det nog att lösningskurvorna i det odämpade fallet är periodiska funktioner. Olika frekvenskomponenter kan framträda olika tydligt i olika x_i . I en praktisk situation är kurvorna resultatet av mätningar, som är behäftade med mätfel. Då är det ganska svårt att bestämma perioderna ”visuellt”. En bättre metod är att använda sig av diskret Fouriertransform. Vi beräknar lägena som ovan men lägger till en slumpmatris av samma typ med lagom stora element (t.ex. `rand(size(x))-0.5`); denna skall motsvara mätfel/brus mm.

Det framgår att mätningar skall göras med jämna intervall Dt som skall uppfylla $Dt < T_{min}/2$, där T_{min} är minsta aktuella perioden. Följande kommandosekvens är ett exempel på hur man kan göra i ett enkelt fall. Här beräknar vi data utgående från funktionen $\sin(0.4652t)$. Vi antar att vi kunnat avgöra att perioden är större än 6. Vi sätter $Dt = 3$ som är mindre än halva den uppskattade minsta perioden.

```
N=2^12;Dt=3;T=(N-1)*Dt;t=0:Dt:T;x=sin(.4652*t)+rand(size(t))-0.5;
z=abs(fft(x));
plot(z(1:length(z)/2))
```

Vi avläser en tydlig topp för vektorindex 911. Detta motsvarar $k = 910$ i definitionen av DFT. Den funna vinkelfrekvensen blir då $2\pi k/(N Dt) = 0.4653$. Detta stämmer bra med uppskattningen $\pi/(N Dt) < 3 \cdot 10^{-4}$ av felet.

Se på de olika kurvorna $x_i(t)$ i deluppgift 5 i det odämpade fallet och välj en där de olika frekvenskomponenterna framgår tydligt. Variera begynnelsedata vid behov. Uppskatta den kortaste perioden och välj Dt och N . Generera sedan data med hjälp av funktionen från deluppgift 5 och lägg på ett ”brus” enligt ovan. Bestäm de ingående frekvenserna med hjälp av `fft`. Vilken noggrannhet ger beräkningen?

7. (Överbetygsuppgift) Antag att massa m_1 drivs av en kraft F_1 . Bestäm impulssvaret (en vektorvärd funktion) och överföringsfunktionen till detta system. Låt sedan $F_1(t) = |\cos \pi t|H(t)$ med alla begynnelsevärden 0 vid $t = 0$. Plotta de tre massornas rörelser för $t > 0$.