

MVE115 Flervariabelanalys AT

Lösningar 27/8

① $\nabla f = (y^2, 2xy), \nabla g = (-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x})$

$$\nabla f \perp \nabla g \Leftrightarrow \nabla f \cdot \nabla g = 0$$

$$\nabla f \cdot \nabla g = -\frac{y^3}{x^2} + 2y = 0 \quad (x, y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow y = x\sqrt{2}$$

(en stråle från origo i I kv.)

② Tangentplan: $ax + by + cz = d$

(a, b, c) kan väljas som

$$\nabla (v.l. - 10) \Big|_{(1, -1, 2)} =$$

$$= (y^2 z^3, 2xy z^3, 1 + 3xy^2 z^2) \Big|_{(1, -1, 2)} =$$

$$= (8, -16, 13)$$

$\Rightarrow$ tangentplanet har ekvation

$$8(x-1) - 16(y+1) + 13(z-2) = 0,$$

eller

$$8x - 16y + 13z = 50.$$

③ $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x = 0 \Rightarrow y = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\Rightarrow f$ har en enda stationär punkt $(0, 0)$

$(0,0) \in$ områdets inre
På randen:

$$y=1 : \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

$$f(t, 1) = \varphi(t) = e^t - 1, \quad \varphi' > 0$$

$\Rightarrow \varphi$ växande

$$\Rightarrow \varphi_{\min} = \varphi(-1) = \left[\frac{1}{e} - 1 \right]$$

$$\varphi_{\max} = \varphi(1) = \left[e - 1 \right]$$

$$y=-1 : \begin{cases} x=t \\ y=-1 \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

$$f(t, -1) = -\varphi(t) \quad (\text{för } \varphi \text{ se ovan})$$

$$(-\varphi)' < 0 \Rightarrow -\varphi \text{ avtagande}$$

$$\Rightarrow (-\varphi)_{\min} = (-\varphi)(1) = \left[-e + 1 \right]$$

$$(-\varphi)_{\max} = (-\varphi)(-1) = \left[-\frac{1}{e} + 1 \right]$$

$$x=1 : \begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

$$f(1, t) = \psi(t) = \psi(e-1) \quad \text{linjär}$$

$$\Rightarrow \psi_{\min} = \psi(-1) = \left[1 - e \right] \quad \text{växande!}$$

$$\psi_{\max} = \psi(1) = \left[e - 1 \right]$$

$$x=-1 : \begin{cases} x=-1 \\ y=t \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

$$f(-1, t) = t \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = \chi(t) \quad \text{linjär, avtagande}$$

$$\Rightarrow \chi_{\min} = \chi(1) = \left[1 - \frac{1}{e} \right] \quad \chi_{\max} = \chi(-1) = \left[1 - \frac{1}{e} \right]$$

$$f(0,0) = 0$$

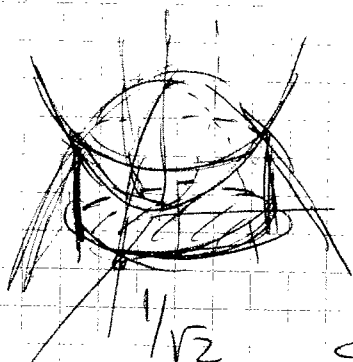
③

De minsta värdena jämförs med varandra:

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{\max} = f(1,1) = e-1 \\ f_{\min} = f(1,-1) = 1-e \end{cases}$$

$$\textcircled{4} I = \iiint z \, dx \, dy \, dz = [\text{cylindrisk}]$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{r^2}^{1-r^2} r z \, dz \, dr \, d\varphi,$$



eftersom
 $x^2 + y^2 = 1 - (x^2 + y^2)$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, d.v.s.

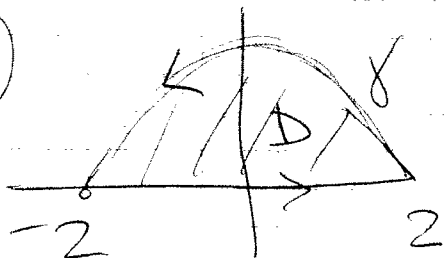
$1/\sqrt{2}$ de två paraboloiderna skär varandra överför cirkeln med radie $1/\sqrt{2}$ och medeltkt origo (på höjd $1/2$). Därmed är integrationsområdet projektion i xy-planet cirkelskivan $\{r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} r \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{r^2}^{1-r^2} dr \, d\varphi =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} r (1 - r^2 - r^2) dr =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{2}{4} r^4 \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}$$

5.



4

Kurvan γ ej
sluten.

Betrakta $\Gamma = \gamma \cup [-2, 2]$

Γ rand till ett område vi
kallar D , moturs orienterad
($\Gamma = \partial D$)

Green sats ger att integralen
över $\Gamma = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy =$

$$= \iint_D (1 - \cancel{2xe^{-y}} + \cancel{2xe^{-y}}) dx dy =$$

$$= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} dy dx = \int_{-2}^2 (4-x^2) dx =$$

$$= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^2 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Från denna ska subtraheras
integralen över sträcken (intervallet)
 $[-2, 2]$, som är

$$\int_{-2}^2 2x dx = 0 \quad (\text{fy } x \text{ udda})$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \dots = \int_{\Gamma} \dots - 0 = \frac{32}{3}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f'(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=r}) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \quad \triangle 5$$

$$= f'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} +$$

$$+ f'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= f''(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Av symmetriskhet fås $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ direkt genom att byta ut x mot y ovan, och vice versa.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2 u =$$

$$= f''(r) \cdot \frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^2}} + f'(r) \cdot \frac{r^2}{(r^2)^{3/2}} + c^2 f(r) =$$

$$= f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + c^2 f(r) = 0$$