

MVE115 Flervariabelanalys AT

Lösningar 11/1 - 2011

① $y=0 : \frac{x^2+0}{x^2+0} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

$y=x : \frac{2x^2}{(2+\lambda)x^2} = \frac{2}{2+\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{2+\lambda}$

$\Rightarrow$ för att det ska finnas ett gränsvärde är det nödvändigt att $\lambda=0$ s.a. $\frac{2}{2+\lambda} = 1$

Är det tillräckligt? Ja, ty

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+0+y^2} = 1 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1$$

$\Rightarrow \exists$ gränsvärde om $\lambda=0$.

② $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{v}{u^2}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(-\frac{1}{u}\right)$$

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{u}{v} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{v}{u} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{u}{v} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{v}{u} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$\Rightarrow \varphi$ satisfierar ekvationen

③ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{(3y-5x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(3y-5x)^2}$

$$\nabla f(1,2) = (2, -1)$$

(a) riktningsvektor (normerad): $v_0 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

$$f'_{v_0}(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot v_0 = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2$$

(b) f'_v har max-värde när $v = \lambda \nabla f, \lambda > 0$,
och det är lika med $|\nabla f(1,2)| = \sqrt{5}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{integralen} &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dy \right) dx \quad (3) \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{4}(1-x) + (1+x)^{-1} - \frac{1}{2} \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{3}{4} + \frac{x}{4} \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln(1+x) - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right)
\end{aligned}$$

⑥ Föreläsningarna för Greens sats är uppfyllde; om D är det begränsade området s.a. $\partial D = C$, har vi

$$\begin{aligned}
I &= \int_C (4y^3 - 3y) dx - x^3 dy = \iint_D (-3x^2 - 12y^2 + 3) dx dy = \\
&= 3 \iint_D (1 - x^2 - 4y^2) dx dy
\end{aligned}$$

Integralens värde kommer att vara störst om vi kan välja D till mängden där $1 - x^2 - 4y^2 \geq 0$

Detta är en ellips (skiva) i xy -planet med ekvation för ellipsen $x^2 + 4y^2 = 1$; skivan: $x^2 + 4y^2 \leq 1$

Elliptiska koordinater: $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = \frac{1}{2} r \sin t \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ t \in [0, 2\pi] \end{matrix}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2) r dt dr = 6\pi \int_0^1 (r - r^3) dr = \\
&= 6\pi \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = 6\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}}
\end{aligned}$$