

MVE115

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Matematisk analys i flera variabler AT

Datum: 2010-03-13, kl. 8.30 - 12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Magnus Goffeng, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9.30 och 11.30.

=====

1. Visa att om $u(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$, där $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, så är u en lösning till differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (5p)$$

2. Givet är funktionen $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x + 12z$.

(a) Finn f 's riktningsderivata i riktningen $(1, -1, 0)$ i punkten $(1, 1, 0)$. (2p)

(b) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x + 12z = 15$ i punkten $(0, 0, 1)$. (3p)

3.(a) Bestäm den linjära funktion som närmast approximerar $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$ nära punkten $(2, 1, 2)$. (3p)

(b) Sidorna AB och BC i triangeln ABC har båda uppmätts till 2 m. Höjden mot sidan AB har uppmätts till 1 m. Man vet att felet i mätningarna är högst 1%. Hur stort fel kan man göra (approximativt) om man beräknar höjden mot sidan BC ur de mätdata man fick? (2p)

4. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} (e^{x^2} - x \cos y) dx + (\sin y^2 + x \sin y) dy,$$

där γ är randen till rektangeln $|x| \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$, ett varv medurs. (5p)

5. En glasvas D har en form som i ett lämpligt koordinatsystem ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 2 + \frac{2}{3}(x^2 + y^2), \quad z \geq 0.$$

(a) Skissa vasen. (1p)

(b) Bestäm volymen av vattnet som ryms i vasen när den är fylld till randen. (4p)

(c) Bestäm volymen som glaset i vasen upptar. (4p)

6. Givet funktionen $f(x, y, z) = x + y + z^2$ ska man bestämma f 's största värde på enhetssfären.

(a) Skissa två olika sätt att lösa uppgiften. (4p)

(b) Lös uppgiften. (Lösningar utan differentialkalkyl accepteras.) (4p)

7.(a) Definiera begreppet riktningsderivata. (2p)

(b) Formulera och bevisa satsen om sambandet mellan gradient och riktningsderivata. (4p)

8.(a) Definiera begreppet potentialfält (konservativt fält, gradientfält). (2p)

(b) Givet att vektorfältet $F = (P, Q) \in C^1(D)$ är ett potentialfält i området $D \in \mathbb{R}^2$, visa att $\int_{\gamma} F \cdot dr = 0$, för alla slutna kurvor $\gamma \in D$. (5p)

Betygsgränser: 20 – 29 p: 3; 30 – 39 p: 4; 40+: 5.

/JM