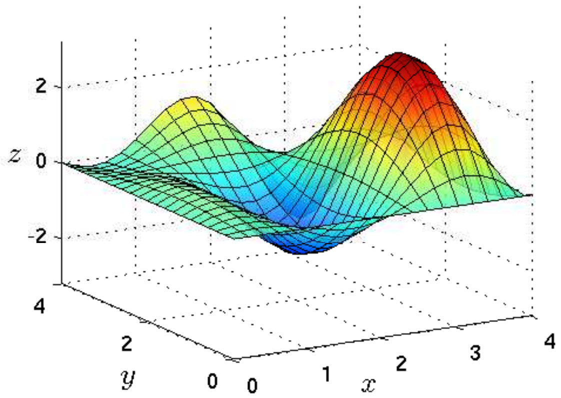
Laboration 1 – Kurvor och funktionsytor

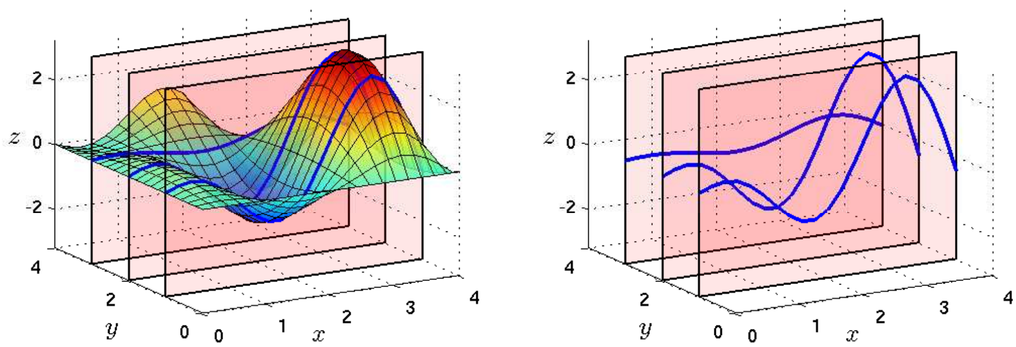
Inledning

En graf till en funktion i en variabel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är mängden $\{(x, y) : y = f(x)\}$, dvs. en kurva i planet. En **graf** till en funktion i två variabler $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är mängden $\{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$, dvs. en **yta** i rummet.

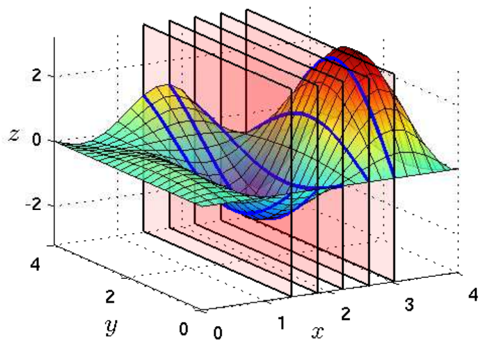
Som exempel tar vi $f(x, y) = x\cos(2x)\sin(y)$ över området $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

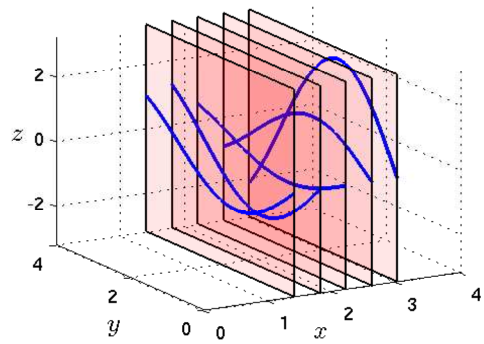


Vi kan se på sektioner i x-led: Tag t.ex. $y = 2$, då skär vi av ytan och snittet blir grafen till $g(x) = f(x, 2) = x\cos(2x)\sin(2)$ som är en funktion i en variabel x. Om vi istället tar t.ex. $y = 1$ får vi $h(x) = f(x, 1) = x\cos(2x)\sin(1)$, dvs. en annan funktion i variabeln x.



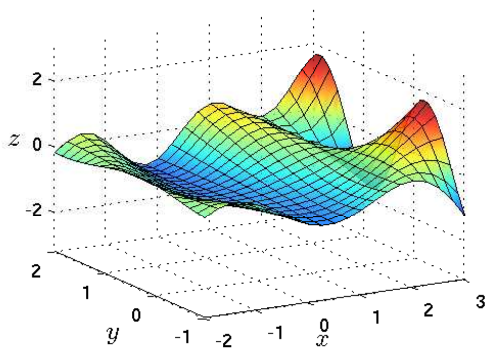
Vi kan också se på sektioner i y-led: Tag t.ex. $x = 2$ och vi får en funktion $k(y) = f(2, y) = 2\cos(4)\sin(y)$ i en variabel y.

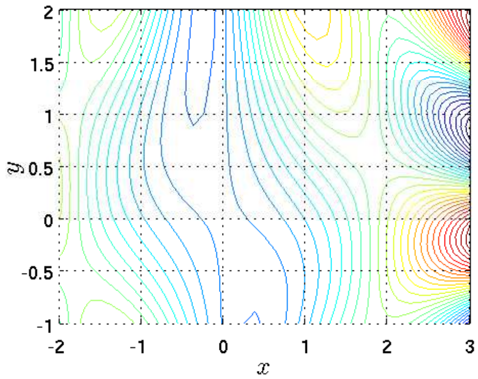




Ett annat sätt att åskådliggöra en funktion i två variabler $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är att rita **nivåkurvor**, dvs. mängderna $\{(x, y) :\ f(x, y) = C\}$, där C är en konstant som anger nivån.

Som exempel tar vi $f(x, y) = (\frac{1}{3}x^2 - 1)\sin(1 - xy)$ över området $-2 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 2$.

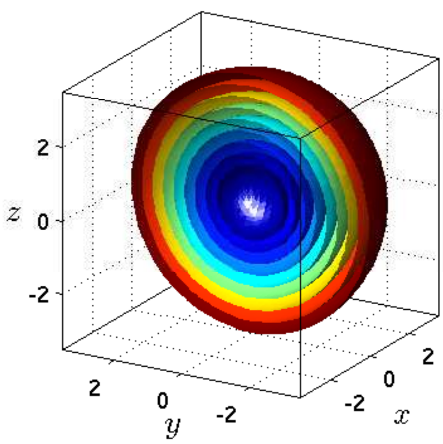




Vi får en slags topografisk karta av funktionen om vi ser funktionsytan som ett landskap och då blir nivån helt enkelt höjden över havet.

En reellvärd funktion i tre variabler $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kan vi inte rita en graf till. Det skulle vara en tredimensionellt objekt i ett fyrdimensionellt rum. Motsvarigheten till nivåkurvor blir **nivåytor**, dvs. mängderna $\{(x, y, z) :\ f(x, y, z) = C\}$ där C konstant. Dessa kan vi däremot rita upp.

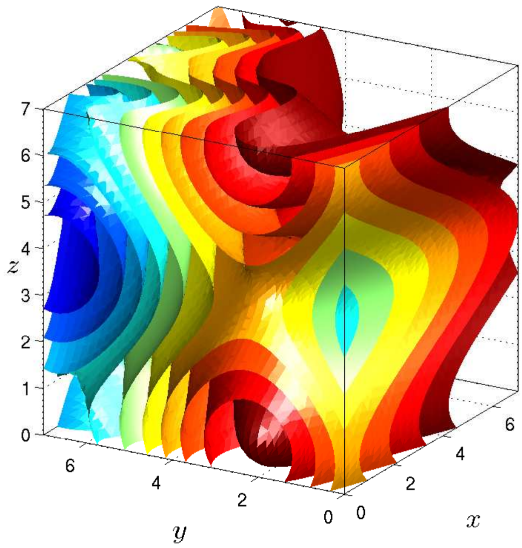
Låt oss som exempel ta funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ i tre variabler. Nivåytorna blir då sfärer $\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 = C\}$ med centrum i origo. Vi har snittat av mitt i för att kunna se de inre nivåerna.



Ett annat lite mer komplicerat exempel är funktionen

$$f(x, y, z) = 0.5\,x + 2\,\sin(0.7\,y) + \sin(z + \cos(0.3\,xy))$$

Här ser vi några nivåytorna, olika färg olika nivåer.



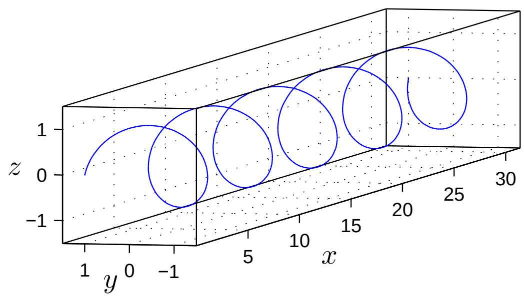
Vi skall också se på vektorvärda funktioner, dels parametrisering av kurvor i planet $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och i rummet $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dels parametrisering av ytor $\boldsymbol{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i rummet.

Exempelvis en cirkel med radien ρ och centrum i (a, b) kan parametriseras av $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ där

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (a + \rho\cos(t), b + \rho\sin(t))$$

med $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ett exempel på en kurva i rummet är den här spiralen



som kan parametriseras av $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ där

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, \cos(t), \sin(t))$$

med $0 \leq t \leq 10\pi$.

Kurvor i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

Vi har redan ritat kurvor i $\mathbb{R}^2$ med kommandot `plot`. Exempelvis enhetscirkeln parametriserad av $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ där

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ritar vi upp med

```
>> t=linspace(0,2*pi);
>> plot(cos(t),sin(t))
>> axis equal
```

När vi skall rita kurvor i $\mathbb{R}^3$ kommer vi använda kommandot `plot3`. Exempelvis spiralen given av parametriseringen $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ där

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad 0 \leq t \leq 10\pi$$

får vi med

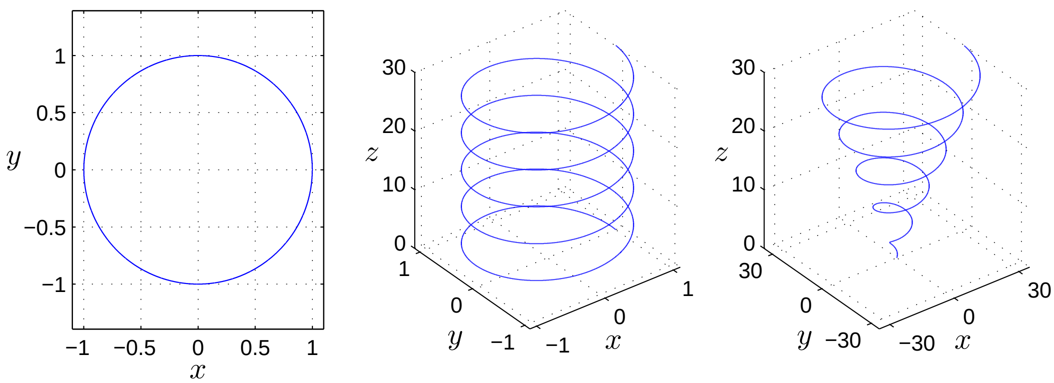
```
>> t=linspace(0,10*pi);
>> plot3(cos(t),sin(t),t)
```

och den koniska spiralen given av

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t\cos(t), t\sin(t), t), \quad 0 \leq t \leq 10\pi$$

ritar vi med (lägg märke till komponentvis multiplikation)

```
>> plot3(t.*cos(t),t.*sin(t),t)
```



Uppgift 1. Rita upp följande kurvor i $\mathbb{R}^2$

(a). Asteroiden

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(b). Cykloiden

$$\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), \quad 0 \leq t \leq 10\pi$$

Kurvan beskriver den väg en myra, som fastnat på ett hjul, färdas när hjulet rullar framåt. Snyggast ser kurvan ut om man ger kommandot `axis equal`.

Uppgift 2. Rita upp följande kurvor i $\mathbb{R}^3$ med `plot3`. Tänk på att ta tillräckligt många t-värden.

(a). $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(10t), \sin(30t), t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

(b). $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3(10t), \sin^3(10t), t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

Funktionsytor i $\mathbb{R}^3$

Vi ser nu på funktionsytan, eller grafen, till funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ där

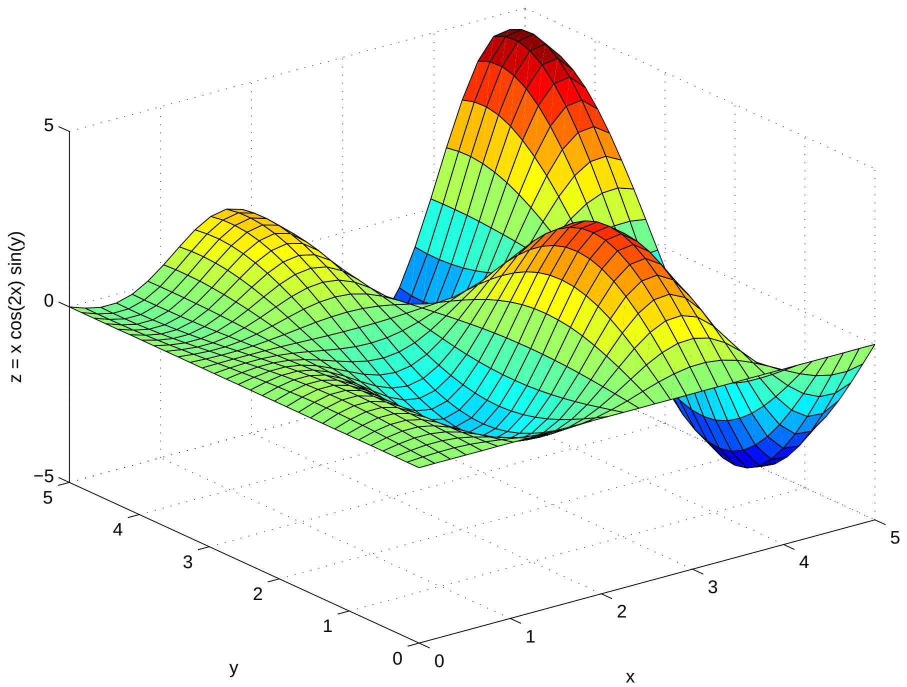
$$f(x, y) = x\cos(2x)\sin(y)$$

över området $0 \le x \le 5$ och $0 \le y \le 5$.

Den yta vi skall rita upp består av alla punkter $(x, y, f(x, y))$ i $\mathbb{R}^3$ där $0 \le x \le 5$ och $0 \le y \le 5$.

Resultatet får vi med kommandot `surf`, vilket är motsvarigheten till `plot` då vi skall rita ytor.

```
>> x=linspace(0,5,30); y=linspace(0,5,30);
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=X.*cos(2*X).*sin(Y);
>> surf(X,Y,Z)
>> grid on
>> xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('z = x cos(2x) sin(y)')
```



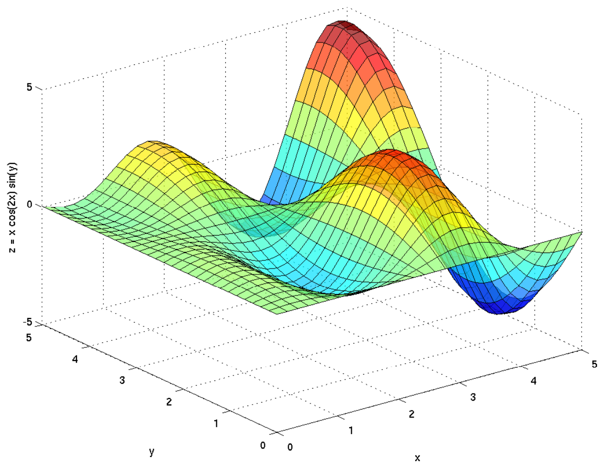
Funktionen `meshgrid` får två vektorer `x` och `y`, med x- och y-värden, som indata och ger två matriser `X` och `Y` som utdata. Dessa matriser är uppbyggda så att vi kan göra en matris `Z` med alla $f(x, y)$-värden på en gång genom att skriva av vår matematiska formel för $f(x, y)$ bara vi samtidigt ersätter x med `X` och y med `Y` samt tänker på att använda komponentvisa operationer rakt igenom.

Ritar vi en graf av en funktion i en variabel tar vi vanligtvis några hundratal x-värden. När vi ritar en funktionsyta tar vi istället vanligtvis några tiotal x- respektive y-värden. Har funktionen ett komplicerat beteende så kan det givetvis krävas mycket mer värden.

Ibland vill man göra en yta lite genomskinlig. Med kommandot

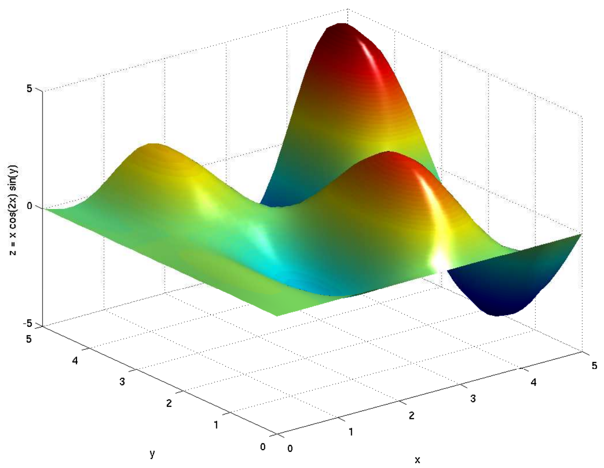
```
>> surf(X,Y,Z,'facealpha',0.7)
```

får vi ytan lite genomskinlig, där värdet vi ger `facealpha` avgör graden av genomskinlighet (0 för helt transparent och 1 för helt solid).



Vi kan också lägga på belysning, välja mellan olika belysningsmodeller och välja mellan olika reflexionsmodeller (material).

```
>> shading interp               % flat, interp, faceted
>> camlight right               % left, right, headlight
>> lighting phong               % none, flat, phong, gouraud
>> material shiny               % shiny, dull, metal
```



Uppgift 3. Rita funktionsytan till funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ där

$$f(x, y) = -xye^{-2(x^2+y^2)}$$

över området $-2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2$.

Hur fungerar det?

Den yta vi skall rita består av alla punkter $(x, y, f(x, y))$, där $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ och $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$. Då vi skall rita ytan med `surf` krävs att vi bildar en $m \times n$-matris $\boldsymbol{Z}$ med elementen

$$z_{ij} = f(x_j, y_i)$$

där $x_{\min} = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x_{\max}$ och $y_{\min} = y_1 < y_2 < \cdots < y_m = y_{\max}$.

Lägg märke till ordningen på indexen, element z_{ij} skall innehålla funktionsvärdet för $x = x_j$ och $y = y_i$. Stigande x-värden längs rader i $\boldsymbol{Z}$, dvs. stigande kolonn-index, och stigande y-värden längs kolonner i $\boldsymbol{Z}$, dvs. stigande rad-index.

Vi går igenom några alternativa lösningar och vi tänker oss att vi i MATLAB redan skapat en funktion `f` och koordinat-vektorer `x` och `y` med `n` respektive `n` element.

Alternativ 1. Vi bildar matrisen `Z` i MATLAB med

```
Z=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        Z(i,j)=f(x(j),y(i));
    end
end
```

Alternativ 2. I första alternativet fick hålla reda på var det skulle vara `i` respektive `j`. Med funktionen `meshgrid` skapas två matriser `X` och `Y` så att `X(i,j)` har värdet `x(j)` och `Y(i,j)` har värdet `y(i)`, dvs. indexproblemet är borta.

```
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        Z(i,j)=f(X(i,j),Y(i,j));
    end
end
```

Alternativ 3. Den allra smidigaste lösningen får vi då vi låter de nästlade repetitionssatserna i tidigare alternativ ersättas av komponentvisa operationer. Dvs. vår funktion `f` måste använda komponetvisa operationer. Vi slipper även initieringen av `Z`.

```
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);
```

Så här enkel blir uppgift 3 med det sista alternativet

```
>> x=linspace(-2,2,30); y=linspace(-2,2,30);
>> f=@(x,y)-x.*y.*exp(-2*(x.^2+y.^2));
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=f(X,Y);
>> surf(X,Y,Z)
```

eller om vi vill trycka ihop det maximalt

```
>> [X,Y]=meshgrid(linspace(-2,2,30),linspace(-2,2,30));
>> surf(X,Y,-X.*Y.*exp(-2*(X.^2+Y.^2)))
```

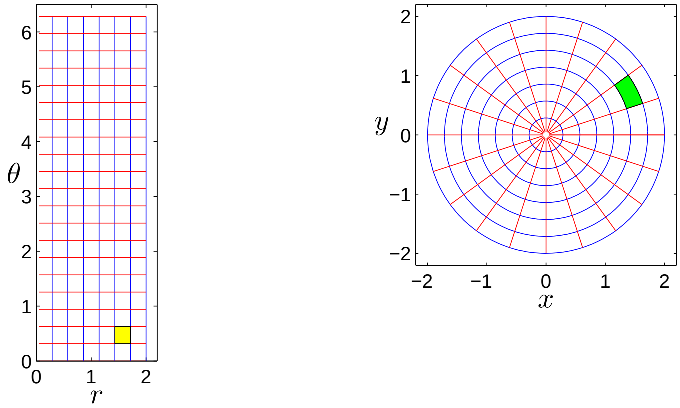
Lämplig läsning om funktionsytor är avsnitt 5.7 i Jönsson.

Polära koordinater

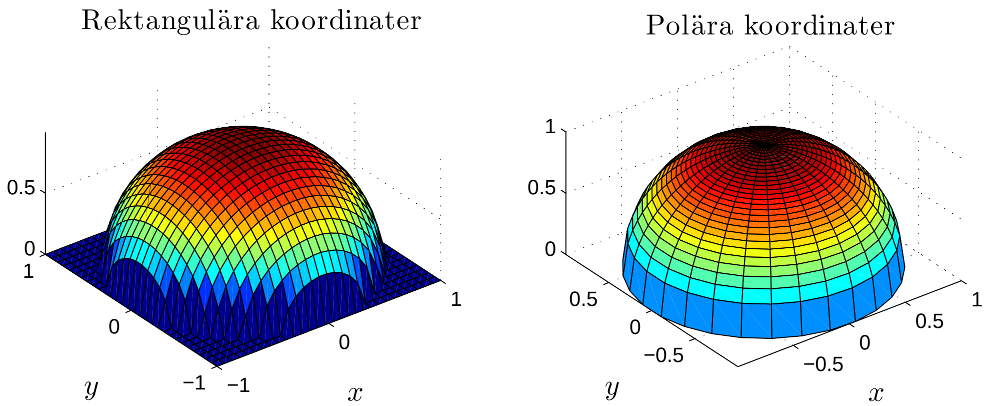
Ibland behöver man byta variabler för att på ett lättare eller bättre sätt behandla ett problem. Ett exempel på varibel- eller koordinatbyte är **polära koordinater**

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

där $(x, y) \neq (0, 0)$ samt $r > 0$ och $0 \leq \theta < 2\pi$.



Vill vi t.ex. rita grafen av $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ över området $x^2 + y^2 \leq 1$, dvs. en halvsfär, så får vi en betydligt snyggare bild med polära koordinater än med rektangulära koordinater.




```
>> subplot(1,2,1)              % Rektangulära koordinater
>> x=linspace(-1,1,30); y=linspace(-1,1,30);
>> [X,Y]=meshgrid(linspace(-1,1,30),linspace(-1,1,30));
>> U=1-(X.^2+Y.^2);
>> U(find(U<0))=0;             % Sätter negativa värden till noll,
>> Z=sqrt(U);                  % så att vi kan ta roten ur utan problem
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal
>> subplot(1,2,2)              % Polära koordinater
>> r=linspace(0,1,30); t=linspace(0,2*pi,30);
>> [R,T]=meshgrid(r,t);
>> X=R.*cos(T); Y=R.*sin(T);
```

```
>> Z=sqrt(1-(X.^2+Y.^2));
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal
```

Uppgift 4. Rita upp de ytor som är grafer till nedanstående funktioner med `surf`:

(a). $f(x,y) = x + 2y - 2,\ \ 1 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 4$

(b). $f(x,y) = x^2 - y^2,\ \ -2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2$

(c). $f(x,y) = (1-y^2)^{1/2},\ \ 0 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 1$

(d). $f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}},\ \ (x,y) \in \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\}$ (Använd polära koordinater)

Nivåkurvor i $\mathbb{R}^2$

Ett annat sätt att åskådliggöra en funktion $f(x,y)$ i två variabler är att rita **nivåkurvor**, dvs. mängderna $\{(x,y) :\ f(x,y) = C\}$, där C är en konstant som anger nivån (höjden över havet).

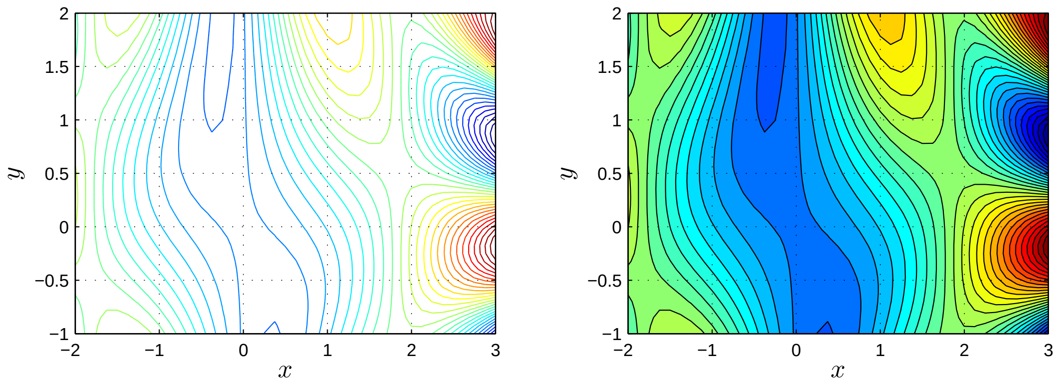
Som exempel ser vi på funktionen

$$f(x,y) = (\frac{1}{3}x^2 - 1)\sin(1-xy),\quad -2 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 2$$

Vi skapar en nivåkurva i MATLAB genom att använda kommandot `contour` enligt

```
>> f=@(x,y)(0.3*x.^2-1).*sin(1-x.*y);
>> x=linspace(-2,3,40); y=linspace(-1,2,40);
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=f(X,Y);
>> contour(X,Y,Z,30)
```

Den lite fylligare bilden nedan till höger fås med `contourf`.



Läs mer om `contour` i Jönsson avsnitt 5.8. Det är också möjligt att rita både yta och nivåkurvor i samma graf med kommandot `surfc`.

Uppgift 5. Rita nivåkurvor till funktionerna i uppgift 4. Gå in och redigera cellerna så att ni samtidigt ser både funktionsytan och nivåkurvorna. Använd `subplot`.

Nivåtor i $\mathbb{R}^3$

För att rita **nivåytor** använder vi `isosurface`. Vi tar exemplet från inledningen, dvs. funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ i tre variabler. Nivåytorna blir då sfärer $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = C\}$ och vi ritar upp för $C = 4$.

```
>> x=linspace(-2,2,30); y=linspace(-2,2,30); z=linspace(-2,2,30);
>> [X,Y,Z]=meshgrid(x,y,z);
>> F=X.^2+Y.^2+Z.^2;
>> isosurface(X,Y,Z,F,4);
>> axis equal, axis([-2 2 -2 2 -2 2]), grid on
```

Vi får nog skjuta detaljerna på framtiden, men vi fick till ett grönt klot (med radien 2) i alla fall.

Allmänna ytor i $\mathbb{R}^3$

Som ett exempel på en mer allmän yta i rummet tar vi en cirkulär **cylinder** med radien r och höjden h som kan beskrivas av

$$x^2 + y^2 = r^2, \;\; 0 \le z \le h$$

Vi kan också göra en s.k. parametrisering

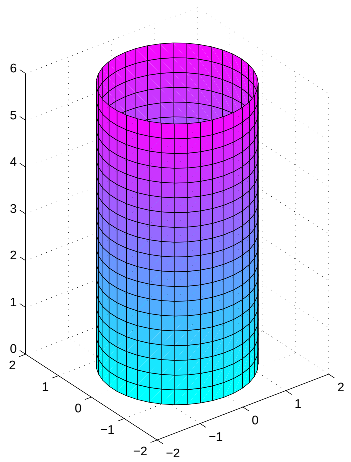
$$\begin{cases} x(s,t) = r\cos(t) \\ y(s,t) = r\sin(t) \\ z(s,t) = s \end{cases}$$

där $0 \le t \le 2\pi$ och $0 \le s \le h$.

Parametriseringen gör att vi lätt kan rita upp ytan i Matlab.

Vi ritar en bild av en cylinder med radien $r = 1.5$ och höjden $h = 6$ enligt

```
>> r=1.5; h=6; n=40; m=20;
>> s=linspace(0,h,m); t=linspace(0,2*pi,n);
>> [S,T]=meshgrid(s,t);
>> X=r*cos(T); Y=r*sin(T); Z=S;
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal, axis([-2 2 -2 2 0 6])
>> colormap(cool)
```



En **sfär** med radien r och centrum i origo ges av

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

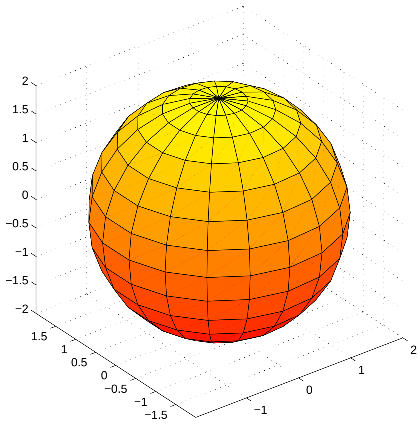
och kan parametriseras med

$$\begin{cases} x(s,t) = r\cos(s)\cos(t) \\ y(s,t) = r\cos(s)\sin(t) \\ z(s,t) = r\sin(s) \end{cases}$$

där $-\frac{\pi}{2} \le s \le \frac{\pi}{2}$ och $0 \le t \le 2\pi$.

Vi ritar en sfär med radien $r = 2$ enligt

```
>> r=2; n=20; m=30;
>> s=linspace(-pi/2,pi/2,n); t=linspace(0,2*pi,m);
>> [S,T]=meshgrid(s,t);
>> X=r*cos(S).*cos(T); Y=r*cos(S).*sin(T); Z=r*sin(S);
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal
>> colormap(autumn)
```



En **torus** med lateralradien r och centralradien a samt centrum i origo ges av

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

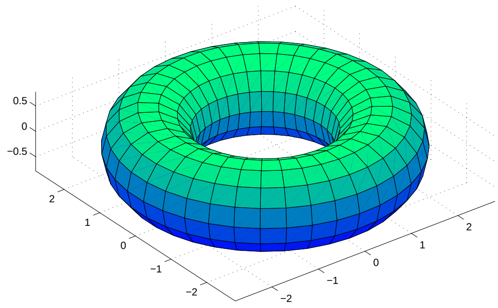
och kan parametriseras med

$$\begin{cases} x(s,t) = (a + r\cos(s))\cos(t) \\ y(s,t) = (a + r\cos(s))\sin(t) \\ z(s,t) = r\sin(s) \end{cases}$$

där $-\pi \le s \le \pi$ och $0 \le t \le 2\pi$.

Vi ritar en torus med lateralradien $r = 0.8$ och centralradien $a = 2$ enligt

```
>> r=0.8; a=2; n=15; m=40;
>> s=linspace(-pi,pi,n); t=linspace(0,2*pi,m);
>> [S,T]=meshgrid(s,t);
>> X=(a+r*cos(S)).*cos(T); Y=(a+r*cos(S)).*sin(T); Z=r*sin(S);
>> surf(X,Y,Z)
>> axis equal
>> colormap(winter)
```



Uppgift 6. Rita en torus runt en sfär, eller något liknande.