MVE115

Matematisk analys i flera variabler AT

Lösningar 10/1 - 2012

1. Nej: $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{\lambda x^2+xy+\lambda y^2}$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \frac{1}{\lambda} \text{ för } \lambda \neq 0$$

(annars ∞ - ej aktuellt)

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{(2\lambda+1)x^2} = \frac{2}{2\lambda+1}$$

(för $2\lambda+1 \neq 0$, annars ∞)

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{2\lambda+1}$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda+1 = 2\lambda$$

omöjligt

$$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \text{ oavsett } \lambda$$

---

2. (a) $\nabla u(1,1,1) = \left(\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \text{grad } u\ (1,1,1)$$

$$|\text{grad } u|\Big|_{(1,1,1)} = \frac{2}{3}|(1,1,1)| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(b) $v = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{4}\right) =$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ej enhetsvektor}$$

tryckfel, skulle ha stått $\frac{\pi}{2}$ i mitten

$\boxed{3}$

$v_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, längd 1
(metoden är densamma, oavsett hur koordinaterna ser ut)

riktningsderivatan $= \nabla u(1,1,1) \cdot v_0 =$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} (1,1,1) \cdot (1,0,1) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(c) $|\text{grad}\, u|^2 = |\nabla u|^2 =$

$$= \frac{4x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{4y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{4z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$

$$= \frac{4}{x^2+y^2+z^2}$$

$\ln |\text{grad}\, u|^2 = \ln 4 - \ln(x^2+y^2+z^2) =$
$= 2\ln 2 - u$, sätt in

---

3. $x - 1 = t$, vi vill ha ett polynom av t och y

$x = t+1$

$$e^{x^2+xy} = e^{t^2+2t+1+ty+y} = e \cdot e^{t^2+2t+ty+y} =$$

$$= e\left(1 + (t^2+2t+ty+y) + \frac{1}{2}(4t^2+y^2+4t^3+2t^2y+\right.$$

(vi tar bara med termer av grad högst 3)

$$+ 4t^2y + 4ty + 2ty^2) + \frac{1}{6}(8t^3+y^3+12t^2y+$$

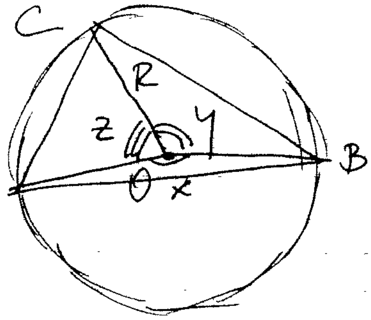
$$\left.+ 6ty^2) + \text{rest}\right) \qquad \text{resten} = O\left(\left(\sqrt{t^2+y^2}\right)^4\right)$$

$t = x-1$

$$\Rightarrow f(x,y) = e\Big(1 + 2(x-1) + y + \left(3(x-1)^2 + 3(x-1)y + \tfrac{1}{2}y^2\right) + \left(\tfrac{10}{3}(x-1)^3 + 5(x-1)^2y + 2(x-1)y^2 + \tfrac{1}{6}y^3\right)\Big) + R$$

$$R = O\left(\left((x-1)^2+y^2\right)^2\right)$$

4.



$$\text{arean}_{ABC} = \text{arean}_{AOB} + \text{arean}_{BOC} + \text{arean}_{COA} =$$

$$= \tfrac{1}{2}R^2\sin x + \tfrac{1}{2}R^2\sin y + \tfrac{1}{2}R^2\sin z =$$

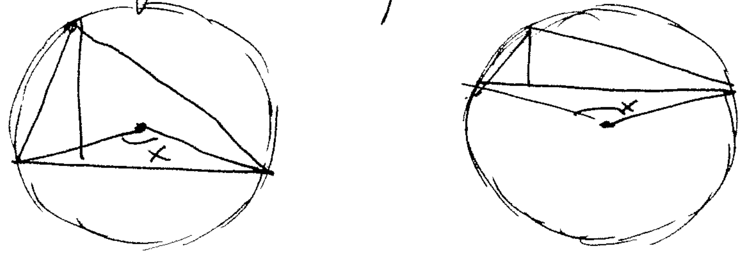
$$= \tfrac{1}{2}R^2(\sin x + \sin y + \sin z), \quad R \text{ fixt}$$

Vi vill alltså hitta

$$\begin{cases} \max(\sin x + \sin y + \sin z) \\ \text{då } x+y+z = 2\pi \end{cases}$$

(optimering med bivillkor)

(Det är uppenbart att arean blir större när cirkelns medelpkt ligger innanför triangeln än när den ligger utanför, givet en sida ∠ centralvinkel:



)

(4)

$$\Phi(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \lambda(x+y+z-2\pi)$$

$\pi \geq x, y, z > 0$

(vi kan titta på ≥ 0)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \cos x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \cos y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \cos z - \lambda = 0$$

$x+y+z = 2\pi, \quad \pi \geq x, y, z \geq 0$

$\cos x = \cos y = \cos z = \lambda$

$\Rightarrow \quad x = y = z$ (se på intervallet)

$\Rightarrow \quad x = y = z = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow$ triangeln liksidig

arean $= \frac{1}{2} R^2 \cdot 3 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$

$x = 0$ ger $y = z = \pi$ area $= 0$

(degenererad Δ)

$x = \pi$ $y + z = \pi$ ger rätvinklig Δ

max: likbent rätvinklig Δ

arean $= \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2 < \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$

$\Rightarrow$ av alla sådana trianglar har den liksidiga maximal area, och den är

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

5. sfäriska koordinater

$r^4 = a^3 r \cos\theta$ origo $\in$ ytan

$\cos\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ ytan och kroppen ovanför xy-planet

xy-planet : $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 0$

$\Rightarrow$ endast origo är med från xy-planet

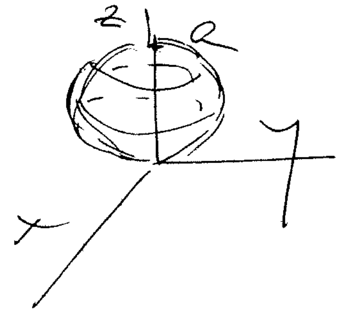
r_{max} för $\cos\theta = 1$ $(\theta = 0)$

ger $r = a$

r växer när θ avtar mot 0

oberoende av $\varphi \Rightarrow$ rotationssymmetri (kring z-axeln)

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq a\sqrt[3]{\cos\theta} \end{cases}$$



$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{6} a^3 \left[-\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{6} a^3 (1 - (-1)) = \frac{\pi a^3}{3}$$

potentialfält : $\exists\, U : F = \nabla U$ 6

både potential- och källfritt fält:

$\exists\, U : F = \nabla U$

$\underbrace{\operatorname{div}(\nabla U)} = 0$

$$= \operatorname{div}\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U = 0$$

$\Rightarrow$ F potential- och källfritt i $\mathbb{R}^3$ omm $\exists$ harmonisk funktion U i $\mathbb{R}^3$ s.a. $F = \nabla U$

Exempel: $U(x,y,z) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

$\Rightarrow \Delta U = 0$

$F(x,y,z) = (2x, -2y, 0)$