Uppgift 1(a). $f'_x(x,y) = \mathrm{e}^{x+2y}$, $f'_y(x,y) = 2\mathrm{e}^{x+2y}$, $f(0,0) = 1$, $f'_x(0,0) = 1$, $f'_y(0,0) = 2$
Tangentplan $z = 1 + x + 2y$ och normallinje $x = \frac{y}{2} = 1 - z$.

(b). $D_{\boldsymbol{u}} f(0,0) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \cdot (1,2) = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Uppgift 2.

$$\begin{cases} u = x\mathrm{e}^y \\ v = y \end{cases} \qquad \begin{cases} u'_x = \mathrm{e}^y, & u'_y = x\mathrm{e}^y \\ v'_x = 0, & v'_y = 1 \end{cases}$$

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = \mathrm{e}^y z'_u$$
$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^y z'_u) = \mathrm{e}^y \frac{\partial}{\partial x}(z'_u) = \mathrm{e}^y(z''_{uu}u'_x + z''_{uv}v'_x) = \mathrm{e}^y(z''_{uu}\mathrm{e}^y) = \mathrm{e}^{2y} z''_{uu}$$
$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^y z'_u) = \mathrm{e}^y z'_u + \mathrm{e}^y \frac{\partial}{\partial y}(z'_u) = \mathrm{e}^y z'_u + \mathrm{e}^y(z''_{uu}u'_y + z''_{uv}v'_y) = \mathrm{e}^y z'_u + \mathrm{e}^y(z''_{uu}x\mathrm{e}^y + z''_{uv}) =$$
$$= \mathrm{e}^y z'_u + x\mathrm{e}^{2y} z''_{uu} + \mathrm{e}^y z''_{uv}$$
$$xz''_{xx} - z''_{xy} + z'_x - x\mathrm{e}^{2y} = x\mathrm{e}^{2y}z''_{uu} - (\mathrm{e}^y z'_u + x\mathrm{e}^{2y}z''_{uu} + \mathrm{e}^y z''_{uv}) + \mathrm{e}^y z'_u - x\mathrm{e}^{2y} = -\mathrm{e}^y z''_{uv} - x\mathrm{e}^{2y} = 0$$

dvs.

$$z''_{uv} = -x\mathrm{e}^y = -u.$$

Vi har

$$z'_u = -uv + f(u) \text{ och } z = -\tfrac{1}{2}u^2 v + F(u) + h(v) = -\tfrac{1}{2}x^2 y\mathrm{e}^{2y} + g(x\mathrm{e}^y) + h(y).$$

Uppgift 3 (a).

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 + 4x_2 \\ 4x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}. \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ och } -3x_1^2 + 4x_1 = x_1(-3x_1 + 4) = 0$$

Vi har de stationära punkterna $(0,0)$ och $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

(b).

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -6x_1 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (0,0)$:

$$\boldsymbol{H}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \left| \begin{bmatrix} -\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{bmatrix} \right| = \lambda(4+\lambda) - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{20}$$

Eftersom $\sqrt{20} > \sqrt{4} = 2$ så är $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ och $\boldsymbol{x} = (0,0)$ är en sadelpunkt.

$\boldsymbol{x} = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$:

$$\boldsymbol{H}(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \left| \begin{bmatrix} -8-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{bmatrix} \right| = (8+\lambda)(4+\lambda) - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = -6 \pm \sqrt{20}$$

Eftersom $\sqrt{20} < \sqrt{36} = 6$ så är $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ och $\boldsymbol{x} = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ är en maximipunkt.

Uppgift 4. Med $D = \{(x,y)\colon\ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ har vi volymen

$$V = \iint_D 1 - (x^2 + 2y^2)\, dxdy$$

Variabelbytet $x = r\cos(\theta), y = r/\sqrt{2}\sin(\theta), 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ med funktionaldeterminant $r/\sqrt{2}$ ger

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-r^2) r/\sqrt{2}\, d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^1 (1-r^2) r/\sqrt{2}\, dr = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Uppgift 5. Vi integrerar direkt. Låt $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ där $\mathcal{C}_1 : (t, 0), 0 \leq t \leq 2$, $\mathcal{C}_2 : (2-t, 3t/2), 0 \leq t \leq 2$. Vi har

$$\int_{\mathcal{C}_1} (xy^2 + xy)\,dx + x^3\,dy = \int_0^2 (t \cdot 0^2 + t \cdot 0) \cdot 1\,dt = 0$$

$$\int_{\mathcal{C}_2} (xy^2 + xy)\,dx + x^3\,dy =$$

$$= \int_0^2 ((2-t)(3t/2)^2 + (2-t)(3t/2)) \cdot (-1) + (2-t)^3 \cdot 3/2\,dt = \cdots = 1$$

Om vi kompletterar med en rät linje mellan $(3, 0)$ och $(0, 0)$ kan vi använda Greens formel. Med Green blir dubbelintegralen över triangeln $\iint_T 3x^2 - 2xy - x\,dxdy = 1$ och kurvintegralen från $(3, 0)$ och $(0, 0)$ blir 0, så resultatet blir återigen 1.

Uppgift 6 (a).

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2^3 - 1 \\ x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + x_2 + 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 3x_2^2 \\ (1 + x_1 x_2)\mathrm{e}^{x_1 x_2} & x_1^2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + 1 \end{bmatrix}$$

(b). Newtons metod:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{d}_k, \quad \text{där} \quad \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_k)\,\boldsymbol{d}_k = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

(c).

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \quad \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{d}_0 = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{01} \\ d_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{d}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Uppgift 7 och 8. Teori.