

MVE115

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Matematisk analys i flera variabler AT

Datum: 2011-08-27, kl. 8.30 - 12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Magnus Önnheim, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9.30 och 11.30.

=====

1. Betrakta funktionerna $f(x, y) = xy^2$ och $g(x, y) = \frac{y}{x}$ för $x > 0, y > 0$. Finn alla punkter i första kvadranten, i vilka nivåkurvorna till f och g är vinkelräta mot varandra. (5p)

2(a). Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan Y som ges av $z + xy^2z^3 = 10$, i punkten $(x, y, z) = (1, -1, 2)$. (5p)

(b) Punkten $(x, y, z) = (1, 1; -0, 9; t)$ ligger på ytan Y . Bestäm med hjälp av det tangentplan som tagits fram i (a) ett approximativt värde på t . (2p)

3. Låt $f(x, y) = ye^x - y$. Bestäm största och minsta värde till f på den slutna kvadraten med hörn i $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1)$ och $(1, 1)$. (4p)

4. Låt K vara den ändliga kropp i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av paraboloiderna $z = x^2 + y^2$, och $z = 1 - (x^2 + y^2)$. Beräkna integralen

$$\iiint_K z \, dx \, dy \, dz. \quad (6p)$$

5. Beräkna arbetet som utförs av kraften $F(x, y) = (2xe^{-y}, x - x^2e^{-y})$, vid rörelse längs parabeln $y = 4 - x^2$, från punkten $(2, 0)$ till punkten $(-2, 0)$. (6p)

6. Ett svängande trumskinn, givet av $x^2 + y^2 \leq R^2$, har svängningsamplitud $u(x, y)$ som uppfyller Helmholtz ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2 u = 0,$$

där c är en konstant. Av symmetriskäl kan man förvänta sig att lösningarna endast är beroende av avståndet till trumskinnets centrum, d.v.s. att de är av formen $u(x, y) = f(r)$, för någon funktion f av en variabel ($f \in C^2$) och $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Visa att f måste uppfylla differentialekvationen

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + c^2 f = 0. \quad (7p)$$

V.G.V.

- 7.(a)** Definiera begreppet riktningsderivata. (2p)
- (b)** Formulera och bevisa satsen om sambandet mellan gradient och riktningsderivata. (4p)

- 8.(a)** Formulera Greens sats. (2p)
- (b)** Visa satsen för ett vektorfält på formen $(P, 0)$. Förklara hur man får det fullständiga beviset om man har bevisen för vektorfält på formen $(P, 0)$ och på formen $(0, Q)$. (7p)

Betygsgränser: 20 – 29 p: 3; 30 – 39 p: 4; 40+: 5.

/JM