

MVE115

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Matematisk analys i flera variabler AT

Datum: 2012-01-10, kl. 8.30 - 12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Jacob Sznajdman, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9.30 och 11.30.

=====

1. Finns det reella tal λ sådana att gränsvärdet

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\lambda x^2 + xy + \lambda y^2}$$

existerar (som ändligt gränsvärde)? (4p)

2. Givet är funktionen $u(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

(a) Beräkna grad u och $|\text{grad } u|$ i punkten $P_0(1, 1, 1)$. (2p)

(b) Beräkna funktionen u 's riktningsderivata i punkten $P_0(1, 1, 1)$, i vektorn v 's riktning, där v bildar vinklarna $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$, med respektive x, y, z -axeln. (4p)

(c) Visa att u satisfierar ekvationen

$$u = 2 \ln 2 - \ln |\text{grad } u|^2. \quad (2p)$$

3. Givet funktionen $f(x, y) = e^{x^2+xy}$, ange dess Taylorpolynom av grad 3 kring punkten $(1, 0)$, samt ange resttermens storleksordning. (6p)

4. Bland alla trianglar, inskrivna i en cirkel med radie R , finn den som har störst area. ("Hint": Som variabler kan du välja centralvinklarna som motsvarar triangelns sidor.) (6p)

5. Skissa ytan $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$, och beräkna volymen av kroppen som omsluts av ytan ($a > 0$). (6p)

6. Divergensen av ett C^1 -vektorfält $F = (F_1, F_2, F_3)$, $F = F(x, y, z)$, definieras som

$$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Fältet $F \in C^1(D)$ kallas *källfritt* i området D , om $\text{div } F = 0$ i D . Beskriv alla C^1 -vektorfält som är både potentialfält och källfria fält i $\mathbb{R}^3$, och ge exempel på ett (icke-konstant) sådant. (6p)

V.G.V.

7.(a) Definiera begreppet kurva. (2p)

(b) Redogör för de två typerna kurvintegraler, förklara hur de beräknas och hur de kan tolkas. (max 5p)

8.(a) Formulera Greens sats. (2p)

(b) Visa satsen för ett vektorfält på formen $(P, 0)$. (5p)

Betygsgränser: 20 – 29 p: 3; 30 – 39 p: 4; 40+: 5.

/JM