

Tentamen i Matematisk analys i flera variabler, MVE115

Datum: 2012-09-01 **Tid:** 8.30-12.30 **Sal:** V **Examinator:** Jacques Huitfeldt
Telefonvakt: Oskar Hamlet, tel. 0703-088304

Betygsgränser: 20, 30 resp. 40 poäng. Tentan omfattar totalt 50 poäng.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel tillåtna. **Resultat:** Meddelas endast med epost via LADOK.

Uppgift 1. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = e^{x+2y}$$

(a). Bestäm ekvationer för tangentplan och normal till f ovanför punkten $(0, 0)$. (2 p)

(b). Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(0, 0)$ och riktningen $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. (1 p)

Uppgift 2. Betrakta den partiella differentialekvationen

$$xz''_{xx} - z''_{xy} + z'_x = xe^{2y}$$

(a). Transformera differentialekvationen genom att införa de nya variablerna

$$\begin{cases} u = xe^y \\ v = y \end{cases} \quad (5p)$$

(b). Lös den transformerade ekvationen och gå tillbaka till de ursprungliga variablerna. (2p)

Uppgift 3. Beräkna samtliga stationära punkter till

$$f(\mathbf{x}) = -x_1^3 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 1$$

och avgör av vilken typ de är.

(a). Beräkna gradienten $\nabla f(\mathbf{x})$ och sätt upp och lös ekvationen $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$. (4p)

(b). Beräkna Hessianen $\mathbf{H}(\mathbf{x})$. Beräkna egenvärdena till $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ i stationära punkter och avgör av vilken typ de är. (4p)

Uppgift 4. Beräkna volymen av soliden (kroppen)

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1\}$$

(8p)

Uppgift 5. Beräkna

$$\int_C (xy^2 + xy) dx + x^3 dy$$

där C är den kurva som i tur och ordning med rätta linjer förbinder punkterna $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(0, 3)$. (6p)

Uppgift 6. Betrakta det icke-linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2^3 - 1 = 0 \\ x_1 e^{x_1 x_2} + x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

(a). Skriv systemet på kompakt form $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Vad blir $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ och vad blir $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$, dvs. beräkna derivatamatriisen. (2p)

(b). Linjärisera $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ runt en punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. (2p)

(c). Skriv upp Newtons metod för ekvationen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. (2p)

(d). Utgående från startapproximationen $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ tag ett steg med Newtons metod. Redovisa alla beräkningar. (2p)

Uppgift 7(a). Definiera begreppet riktningsderivata. (2p)

(b). Formulera och bevisa satsen om sambandet mellan gradient och riktningsderivata. (3p)

Uppgift 8(a). Formulera Greens sats. (2p)

(b). Bevisa satsen. (3p)
