

Tentamen i Matematisk analys i flera variabler, MVE115

Datum: 2012-03-03 **Tid:** 8.30-12.30 **Kontakt:** Jacques Huitfeldt, tel. 070-8868527

Betygsgränser: 20, 30 resp. 40 poäng. Tentan omfattar totalt 50 poäng.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel tillåtna. **Resultat:** Meddelas endast med epost via LADOK.

Uppgift 1. Betrakta funktionen

$$f(x, y) = 2x + \ln(x^2 + y^2 + y)$$

(a). Beskriv funktionens definitionsområde D_f . (2 p)

(b). Bestäm ekvationer för tangentplan och normal till f ovanför punkten $(1, -1)$. (1 p)

(c). Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1, -1)$ och riktningen $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. (1 p)

Uppgift 2. Betrakta den partiella differentialekvationen

$$xz''_{xx} - yz''_{xy} + z'_x = y, y > 0$$

(a). Transformera differentialekvationen genom att införa de nya variablerna

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$$

Ledning: Enklast att uttrycka $z'_x, z''_{xx}, \dots$, i de nya variablerna. (6p)

(b). Lös den transformerade ekvationen och gå tillbaka till ursprungliga variablerna. (2p)

Uppgift 3. Betrakta funktionen

$$f(\mathbf{x}) = \frac{3x_1x_2 - x_1^2x_2^2}{x_1 + x_2}$$

på området $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

(a). Beräkna gradienten $\nabla f(\mathbf{x})$. Beräkna alla stationära punkter i D genom att sätta upp och lösa ekvationen $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. (4p)

(b). Beräkna Hessianen $\mathbf{H}(\mathbf{x})$. Beräkna egenvärdena till $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ i stationära punkter och avgör av vilken typ de är. (4p)

Uppgift 4. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_D z\sqrt{x^2 + y^2} dV$$

där D är området $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$. (8p)

Uppgift 5. Beräkna

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 - xy) dx + (xy - y^2) dy$$

där $\mathcal{C}$ går ett varv moturs runt triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(2, 0)$. (6p)

Uppgift 6. Vi skall använda Steepest descentmetoden för att minimera

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_1 + x_1x_2 + x_2^2$$

(a). Utgå från startapproximationen $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ och låt

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 - s \nabla f(\mathbf{x}_0)$$

Bestäm $\hat{s} \geq 0$ som minimerar $g(s) = f(\mathbf{x}(s))$ och bilda

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \hat{s} \nabla f(\mathbf{x}_0)$$

som vi tar som nästa approximation. (3p)

(b). Visa att $\nabla f(\mathbf{x}_1) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$. (3p)

Uppgift 7(a). Formulera satsen som ger ett samband mellan gradient och nivåkurvor. (2p)

(b). Bevisa satsen. (3p)

Uppgift 8(a). Formulera Greens sats. (2p)

(b). Bevisa satsen. (3p)
