

# Lösningar till MVE115 2013 03 09

① a)  $f(1, \pi) = 2 + 1 \sin \pi + \pi \ln 1 = 2 + 0 + 0$   
Nivåkurvan är därför  $f(x, y) = 2$ , dvs  
 $x \sin y + y \ln x = 0$

b)  $f$  växer snabbast i gradientens riktning

$\nabla f(x, y) = (\sin y + \frac{y}{x}, x \cos y + \ln x)$ , och  
 $\nabla f(1, \pi) = (\sin \pi + \frac{\pi}{1}, \cos \pi + \ln 1) = (\pi, -1)$

c) Tangentplan till  $Z = f(x, y)$  i  $(a, b, f(a, b))$ :

$Z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b)$ .

Här  $Z = 2 + \pi(x-1) - 1(y-\pi)$ , dvs

$\pi x - y - Z = -2$

② Sök potential:  $\phi'_x = 2xy \Rightarrow \phi = x^2 y + g(y)$   
 $\phi'_y = x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + g'(y) = x^2 - y^2$ , dvs  $g'(y) = -y^2$ ,  $g(y) = -\frac{y^3}{3}$   
 $\phi = x^2 y - \frac{y^3}{3}$  är således en potential och då är  
integralen oberoende av vägen och

$\int_C P dx + Q dy = \phi(2, 2) - \phi(1, 1) = 8 - \frac{8}{3} - (1 - \frac{1}{3}) = \frac{14}{3}$

③  $\begin{cases} 1) f'_x = 2x + 4y + y^2 = 0 \\ 2) f'_y = 4x + 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=0} \text{ eller } \underline{y=-2}$

$\underline{x=0}$  ger ent.  $y=0$  eller  $y=-4$

$\underline{y=-2}$  ger ent.  $x=0$ , dvs  $\underline{x=2}$

Tre stationära punkter:  $(0, 0)$ ,  $(0, -4)$  och  $(2, -2)$

$f''_{xx} = 2$ ,  $f''_{xy} = 4 + 2y$ ,  $f''_{yy} = 2x$ . Hessiannen blir

$(0, 0)$ :  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  med determinant  $< 0$ , dvs sadelpunkt.

$(0, -4)$ :  $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$  — " — , dvs sadelpunkt

$(2, -2)$ :  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ . Determinant  $> 0$ ,  $f''_{xx} > 0$  ger minimum

④ Greens formel ger  $I = \int_C 6xy dx + (x^3 + 3xy^2) dy =$   
 $= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 3xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(6xy) \right) dx dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2 - 2x) dx dy =$   
 $= 3 \iint_D ((x-1)^2 + y^2 - 1) dx dy$ . Polära koordinater  
Kring  $(1, 0)$ :  $\begin{cases} x = 1 + r \sin \theta \\ y = r \cos \theta \end{cases}$ ,  $dx dy = r dr d\theta$ .  
 $I = 3 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (r^2 - 1) r dr \right) d\theta = 6\pi \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{3\pi}{2}$

⑤ Sfäriska koordinater:

$I = \iiint_D z e^{-x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz = \iiint_D r^3 e^{-r^2} \cos \theta \sin \theta dr d\theta d\varphi$

$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2z^2 = r^2 \Leftrightarrow 2\cos^2 \theta = 1$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$  (obs  $z > 0$  ger  $\theta > 0$ ). Därmed är

$D'$ :  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $0 \leq r < \infty$

$I = 2\pi \int_0^{\pi/4} (\cos \theta \sin \theta) d\theta \int_0^\infty r^3 e^{-r^2} dr =$

$= \pi \left[ \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/4} \left( \underbrace{-\frac{r^2}{2} e^{-r^2}}_0 + \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \right) = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$

⑥

$z > 0$  och  $x^2 + y^2 \leq 1$  ger området  $D$  i  $\mathbb{R}^3$

Av symmetriskäl får vi

Arean  $= 2 \iint_{D_1} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$

$= [\text{pol. koord.}] = 2 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2} dr \right) d\theta$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} \left[ (1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{12} (5\sqrt{5} - 1)$

