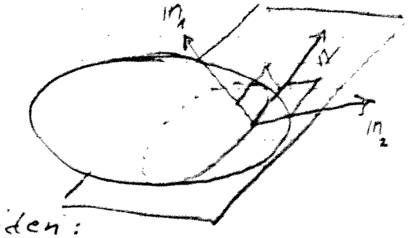
Lösningar till
MVE 115 13 08 31

(1) En normalvektor till planet: $n_1 = (1, -1, -2)$



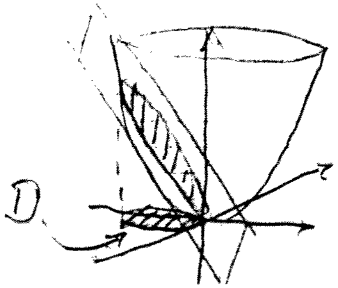
En normalvektor till ellipsoiden:
grad $(x^2+2y^2+z^2) = (2x+4y+2z)$ och i punkten $(1, 2, -1)$ får vi $(2, 8, -2) = 2(1, 4, -1)$
$n_2 = (1, 4, -1)$. En tangentvektor till skärningskurvan i punkten $(1, 2, -1)$ blir då $n_1 \times n_2 =$
$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (1+8, -2+1, 4+1) = (9, -1, 5)$
Tangentens ekvation: $\underline{\underline{(x, y, z) = (1, 2, -1) + t(9, -1, 5)}}$

---

(2) Arbetet ges av kurvintegralen
$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\gamma z\,dx + x\,dy + yz\,dz = \{(x, y, z) =$
$= (\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi}),\ 0 \xrightarrow{t} 2\pi\} =$
$= \int_0^{2\pi} (\frac{t}{2\pi}(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + \sin t \cdot \frac{t}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi})\,dt =$
$= \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{2\pi} - 1) \int_0^{2\pi} t \sin t\,dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \{\text{part. int. i 1:a}\} =$
$= \frac{1-2\pi}{(2\pi)^2}\left([-t\cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t\right) + \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t)\,dt =$
$= \frac{1-2\pi}{(2\pi)^2}(-2\pi + 0) + \pi = \underline{\underline{\pi + 1 - \frac{1}{2\pi}}}$

---

(3) Kroppen ges av att
$x^2 + y^2 \le 2 - 3x - 2y \iff$
$(x + \frac{3}{2})^2 + (y-1)^2 \le \frac{21}{4}$ som
definierar området D i fig.



Volymen $= \iint_D (2-3x-2y) - (x^2+y^2)\,dxdy =$
$= \iint_D \frac{21}{4} - (x - \frac{3}{2})^2 - (y-1)^2\,dxdy = \{\text{polära koord. med pol i } (\frac{3}{2}, 1)\} =$
$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{21}}{2}} (\frac{21}{4} - r^2)\,r\,dr \right) d\theta = 2\pi \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{4} r^2 - r^4\right]_0^{\sqrt{\frac{21}{4}}} = \underline{\underline{\frac{21^2\pi}{32}}}$

---

(4) f är kontinuerlig och området, D, är kompakt. Därmed finns största och minsta värde.
Stationära punkter? $f'_x = 2x(y-1) = 0 \iff x = 0$ eller $y = 1$
f saknar stationära punkter i det inre.

På R_1 är $f(x, y) = -\frac{y^3}{3}$ som är avtagande
Möjliga extremvärden $f(0, -1) = \frac{5}{3}$, $f(0, 1) = -\frac{5}{3}$
På R_2 $f(x, y) = \{x^2 = 1 - y^2\} = g(y) = -\frac{8}{3}y^3 + y^2 + y - 1$ och
$g'(y) = -8y^2 + 2y + 1 = -8(y - \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})$
Möjliga punkter $f(x, y) = g(-\frac{1}{2}) = -\frac{55}{48}$, $g(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{12}$
Jämförelse ger $\underline{\underline{\max = f(0, -1) = \frac{5}{3},\ \min = f(0, 1) = -\frac{5}{3}}}$

---

(5) Greens formel ger $\int_\gamma = -\int_{-\gamma} = -\iint_D$ divergensen $=$
$= \iint_D 6x - 3x^2 - 3y^2\,dxdy = 3\iint_D (1 - (x-1)^2 - y^2)\,dxdy$,
som blir maximal om $D = \{(x, y): 1 - (x-1)^2 - y^2 \ge 0\}$,
dvs D = cirkeln $(x-1)^2 + y^2 \le 1$. $\underline{\underline{\gamma = \text{cirkeln } (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ medurs}}}$

---

(6) $\begin{cases} u = x + ay \\ v = x - y \end{cases}$ ger med $f(x, y) = g(u, v)$ att
$f'_x = g'_u + g'_v$, $f'_y = a g'_u - g'_v$ och ekvationen blir
$(3 + 4a) g'_u - g'_v = 2\sin v$. Välj $a = -\frac{3}{4}$ så får vi
$g'_v = -2\sin v$ och $g = 2\cos v + \varphi(u)$ dvs
$f(x, y) = 2\cos(x - y) + \varphi(x - \frac{3}{4}y)$
villkoret ger $2\cos(-y) + \varphi(-\frac{3}{4}y) = y^2 + 2\cos y$
dvs $\varphi(-\frac{3}{4}y) = y^2$, eller $\varphi(t) = \frac{16}{9}t^2$.
$f(x, y) = 2\cos(x - y) + \frac{16}{9}(x - \frac{3}{4}y)^2 = \underline{\underline{2\cos(x - y) + (\frac{4}{3}x - y)^2}}$