Lösningar till MVE115
14-08-30

① a) $f(1,-1) = -\frac{\pi}{4} + e^0 = 1 - \frac{\pi}{4}$, så nivåkurvan är $\underline{x\arctan y - ye^{x+y} = 1 - \frac{\pi}{4}}$

b) I gradientens riktning:
$\nabla f = \left(\arctan y - ye^{x+y},\ \frac{x}{1+y^2} - ye^{x+y} - e^{x+y}\right) =$
$= \{\text{i punkten } (1,-1)\} = \underline{\underline{\left(1-\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)}}$

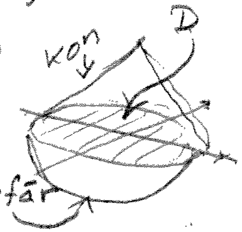
c) Tangentplanet: $z - z_0 = f'_x \cdot (x - x_0) + f'_y \cdot (y - y_0)$
dvs $z - 1 + \frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)(x-1) + \frac{1}{2}(y+1)$, eller
$\underline{\underline{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)x + \frac{1}{2}y - z = -\frac{1}{2}}}$

---

② Sök potential; $\phi'_x = ye^{xy} + 2xy \Rightarrow$
$\Rightarrow \phi = e^{xy} + x^2y + g(y)$.
$xe^{xy} + x^2 + 1 = \phi'_y = xe^{xy} + x^2 + g'(y)$ dvs
$g'(y) = 1$. Välj $g(y) = y$ $\quad \phi = e^{xy} + x^2y + y$.
Integralen $= \phi(1,3) - \phi(3,1) = e^3 + 3 + 3 - (e^3 + 9 + 1) = \underline{\underline{-4}}$

---

③ Volymen $= \iint_D \left(1 - \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{1-x^2-y^2}\right) dx\,dy =$
$=$ polära koordinater $= \iint_{D'} \left(1 - r - \sqrt{1-r^2}\right) r\,dr\,d\theta$



$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r - r^2 - r\sqrt{1-r^2}\, dr \right) d\theta =$

$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - \frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} \right]_0^1 = \pi\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\pi}}$

$\underline{\text{Obs}}$ $\sqrt{1-x^2-y^2} \geq 1 - \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow 1 - r^2 \geq 1 + r^2 - 2r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2r^2 - 2r \leq 0 \Leftrightarrow r \leq 1$.

---

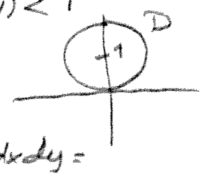
④ Stationära punkter i det inre:
$\nabla f = (yz, xz, xy) = (0,0,0) \Leftrightarrow x = y = z = 0$ och $f(0,0,0) = 0$.
$\underline{\text{Randen}}$: Bivillkor: $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
$\nabla(f - \lambda g) = 0 \Leftrightarrow yz = 2\lambda x, xz = 2\lambda y, xy = 2\lambda z$
dvs $xyz = 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 = 2\lambda z^2$. $\lambda \neq 0$ ty annars är $f(x,y,z) = 0$. Vi får $x^2 = y^2 = z^2 = 1/3$
och $(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\pm1, \pm1, \pm1)$, (8 punkter)

$\underline{\text{största värdet}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ (vid jämnt antal minus)

$\underline{\text{minsta värdet}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (" udda " —)

---

⑤ Ytan kan skrivas $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ för $(x,y) \in D$
där D ges av $x^2 + y^2 < 2y$, dvs $x^2 + (y-1)^2 < 1$



$A = \iint_D \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}\, dx\,dy =$

$= \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{4-x^2-y^2} + \frac{y^2}{4-x^2-y^2} + 1}\, dx\,dy = \iint \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dx\,dy =$

$=$ polära koord. $\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\sin t} \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\, dr \right) d\theta = 2 \int_0^{\pi} \left[-\sqrt{4-r^2} \right]_0^{2\sin t} dt =$

$= 4 \int_0^{\pi} (1 - |\cos t|)\, dt = 8 \int_0^{\pi/2} 1 - \cos t = 8\left[t - \sin t\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{4\pi - 8}}$

---

⑥ $u = \frac{x}{y}$, $v = y \Rightarrow f'_x = f'_u \cdot \frac{1}{y}$ och $f'_y = f'_u\left(-\frac{x}{y^2}\right) + f'_v$
$\Rightarrow xf'_x + yf'_y = f'_u \cdot \frac{x}{y} - f'_u \cdot \frac{x}{y} + f'_v \cdot y = vf'_v$ och
då $x + y = uv + v$ får vi ekvationen $vf'_v = uv + v$ eller
$(y = v > 0)$ $\underline{f'_v = u + 1}$ som har lösning $f = uv + v + g(u) =$
$= x + y + g\left(\frac{x}{y}\right)$. $\quad f(x,1) = x^2 + x + 1$ ger då
$x + 1 + g(x) = x^2 + x + 1$, dvs $g(x) = x^2$, och lösningen
blir då $\underline{\underline{f(x,y) = x + y + \frac{x^2}{y^2}}}$