

Flervariabelanalys (Adams 11-16)

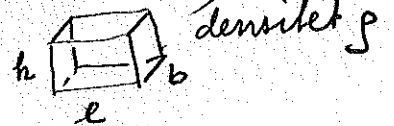
- funktion av flera variabler, t.ex.,

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z), \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

eller med matrisbeteckningar:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{i Matlab})$$

ex: $M = \rho b l h = x_1 x_2 x_3 x_4$.



- vektorvärd funktion

$$\vec{f}(t) = f_x(t)\vec{i} + f_y(t)\vec{j} + f_z(t)\vec{k}$$

eller $\vec{g}(\vec{r}) = g_x(x, y, z)\vec{i} + g_y(x, y, z)\vec{j} + g_z(x, y, z)\vec{k}$

eller med matrisbeteckning

$$f(x) = [f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)]$$

- derivera: $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$ partiell derivata

- integrera: $\iiint f(x, y, z) dx dy dz$

- ekvationer:

- system av algebraiska ekv, $f(x) = 0$, Newtons metod
 - partiell differentialekvation (PDE),
 finita elementmetoden

11.1 Vektorfunktion av en variabel

(2)

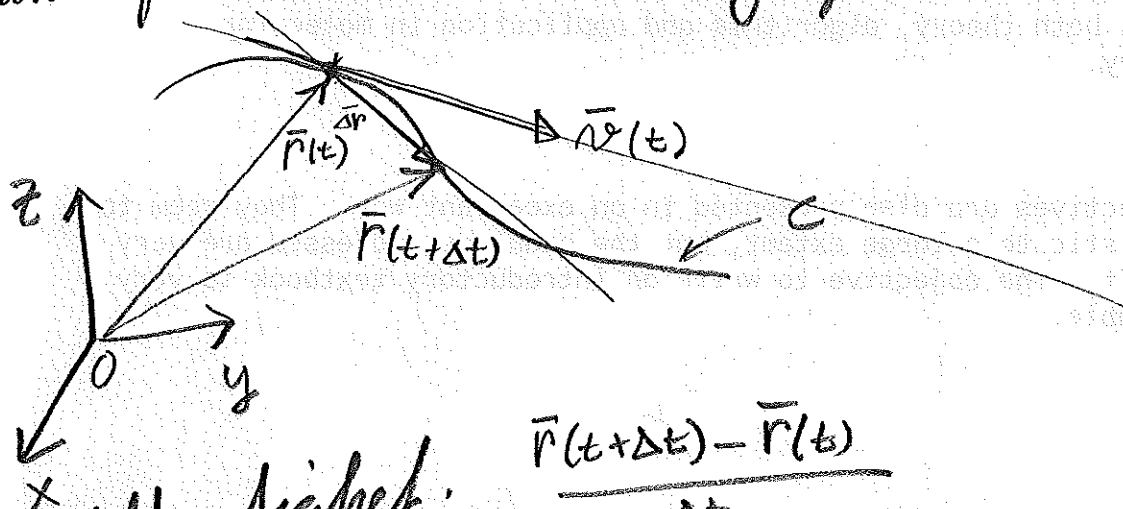
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Geometrisk tolkning:
läget av en partikel
vid tiden t .

Antag: $x(t), y(t), z(t)$ kontinuerliga så
att partikeln rör sig på en kurva C .



medelhastighet:

$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Hastighet: $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$
 $= \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

Fart (speed): $v(t) = |\vec{v}(t)|$

Derivera komponentvis: $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$

Figuren ger: $\vec{v}(t)$ är tangentvektor
till kurvan C i punkten $\vec{r}(t)$.

Acceleration: $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t)$
 $= \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

Exempel (cirkel)

$$\vec{r} = a \cos(\omega t) \vec{i} + a \sin(\omega t) \vec{j} \quad (a > 0, \omega > 0)$$

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t) \\ y = a \sin(\omega t) \\ z = 0 \end{cases}$$

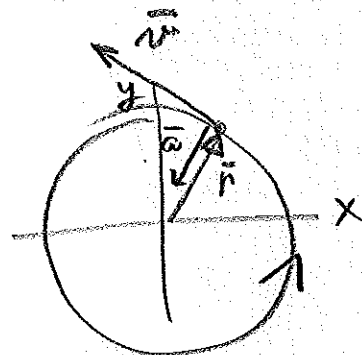
$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\vec{v} = -a\omega \sin(\omega t) \vec{i} + a\omega \cos(\omega t) \vec{j}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(-a\omega \sin(\omega t))^2 + (a\omega \cos(\omega t))^2}$$

$$= \sqrt{a^2 \omega^2} = |a\omega| = a\omega$$

$$\vec{a} = -a\omega^2 \cos(\omega t) \vec{i} - a\omega^2 \sin(\omega t) \vec{j} = -\omega^2 \vec{r}$$



Exempel (spets)

$$\vec{r} = t^3 \vec{i} + t^2 \vec{j}$$

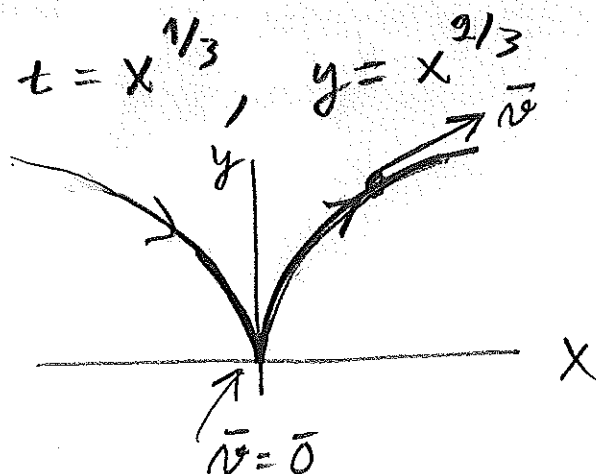
$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = 3t^2 \vec{i} + 2t \vec{j}$$

Eliminera t : $x = t^3$, $t = x^{1/3}$, $y = x^{2/3}$

Kurvan är en graf:

$$y = x^{2/3}$$



Sats 1 (Derivering av kombinationer) (4)

Om $\bar{u}(t), \bar{v}(t), \lambda(t)$ är deriverbara
så är $\bar{u} + \bar{v}, \lambda \bar{u}, \bar{u} \cdot \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v}, \mu \circ \lambda$
deriverbara och

$$(a) \frac{d}{dt}(\bar{u} + \bar{v}) = \bar{u}' + \bar{v}'$$

$$(b) \frac{d}{dt}(\lambda \bar{u}) = \lambda' \bar{u} + \lambda \bar{u}'$$

$$(c) \frac{d}{dt}(\bar{u} \cdot \bar{v}) = \bar{u}' \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{v}'$$

$$(d) \frac{d}{dt}(\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{u}' \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{v}'$$

$$(e) \frac{d}{dt} \bar{u}(\lambda(t)) = \lambda'(t) \bar{u}(t)$$

$$(f) \frac{d}{dt} |\bar{u}(t)| = \frac{\bar{u}(t) \cdot \bar{u}'(t)}{|\bar{u}(t)|} \quad \text{om } \bar{u}(t) \neq \bar{0}$$

Beweis: skriv på komponentform och
använd de vanliga deriveringsreglerna.

$$\text{Obs från (c): } \frac{d}{dt} |\bar{u}|^2 = \frac{d}{dt} (\bar{u} \cdot \bar{u}) =$$

$$= \bar{u}' \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \bar{u}' = 2 \bar{u} \cdot \bar{u}'$$

$$\text{och } \frac{d}{dt} |\bar{u}|^2 = 2 |\bar{u}| \frac{d}{dt} |\bar{u}| \quad \text{ger}$$

$$\frac{d}{dt} |\bar{u}| = \frac{1}{2 |\bar{u}|} \frac{d}{dt} |\bar{u}|^2 = \frac{\bar{u} \cdot \bar{u}'}{|\bar{u}|}$$

(Detta är alternativt bevis av (f))

Lättare att
räkna med
 $|\bar{u}|^2$ än $|\bar{u}|$!

11.3 Parametrisering av kurva.

Vad är en kurva i rummet?

En kurva i rummet är en punktmängd

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b$$

$\xleftarrow{t=a} \xrightarrow{t=b}$

där koordinatfunktionerna är kontinuerliga.

Vi antar dessutom att $\vec{r}$ har kontinuerlig derivata $\frac{d\vec{r}}{dt}$, annars kan kurvan

vara patologisk (sjukt), t. ex., passera genom varenda punkt i en volym.

Kurvan är slät (smooth) utom möjligen där $\vec{r}'(t) = \vec{0}$. Kom ihåg: "ex. "spets."

[Byte av parameter: (kedjeregeln) $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$
påverkar farten, byter riktning om $\frac{ds}{dt} < 0$;

En kurvan kan parametriseras på många sätt.

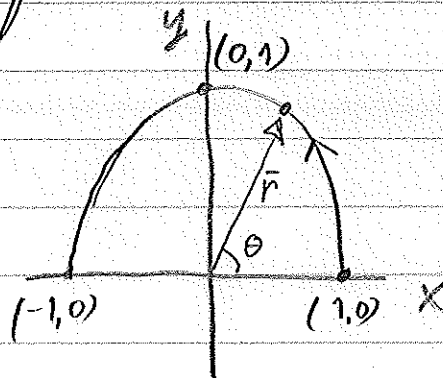
ex. halvcirkeln

a) Välj $t = \theta$

$$\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \sin(t), \quad 0 \leq t \leq \pi \\ z = 0, \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = 1$$



b) Välj $s = 1 - x$:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = -\vec{i} + \frac{1-s}{\sqrt{1-(1-s)^2}} \vec{j}$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1/\sqrt{1-(1-s)^2}$$

$$\begin{cases} x = 1-s \\ y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(1-s)^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

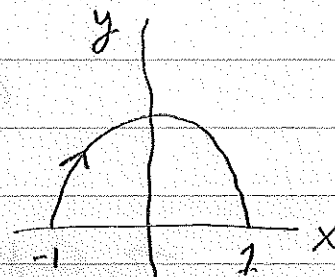
$$0 \leq s \leq 2,$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = -\vec{i} + \frac{1-s}{\sqrt{1-(1-s)^2}} \vec{j}$$

c) Välj $u = 2x$

5b

$$\begin{cases} x = u/2, \\ y = \sqrt{1 - u^2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - u^2}, u \in [-2, 2] \\ z = 0, \end{cases}$$



$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{u}{\sqrt{4 - u^2}}\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{du} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{u^2}{4 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 - u^2}}$$

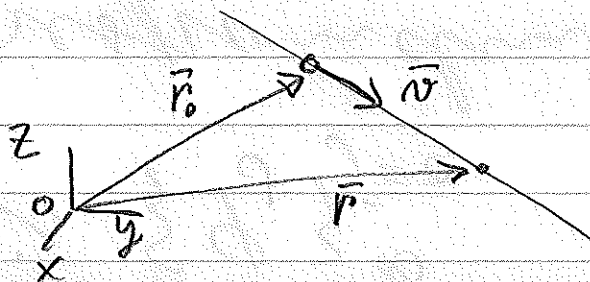
Bytt riktning och fört.

Exempel: rät linje

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t, \\ y = y_0 + v_y t, \\ z = z_0 + v_z t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, \infty)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$



Båglängd (arc length)

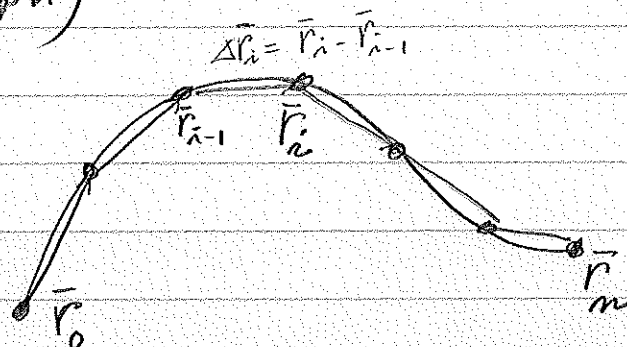
(6)

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \quad a \leq t \leq b$$

Nåt:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_m = b$$

$$\bar{r}_i = \bar{r}(t_i), \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$



Kurvans längd approximeras av

$$s_m = \sum_{i=1}^m |\bar{r}_i - \bar{r}_{i-1}| = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\Delta \bar{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

Om $\frac{d\bar{r}}{dt}$ är kontinuerlig får vi

kurvans längd:

$$L = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \max \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\Delta \bar{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i = \int_a^b \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$$

Båglängden är

$$s(\tilde{t}) = \int_a^{\tilde{t}} \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$$

Vi får

$$s'(t) = \left| \frac{d\bar{r}}{dt}(t) \right| = v(t)$$

och båglängds-elementet

$$ds = v(t) dt = \left| \frac{d}{dt} \bar{r}(t) \right| dt$$

$$s(t) = \int_0^{s(t)} ds$$

Båglängden beror ej ^{på} vilken parametrisering vi använder. (7)

Båglängden kan också användas som parameter:

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad 0 \leq s \leq L$$

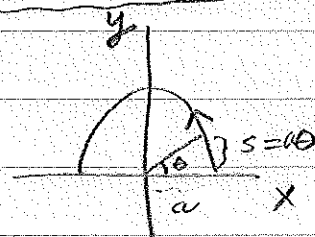
○ Då blir farten

$$v(s) = \frac{ds}{ds} = 1$$

Båglängdsparametrisering enkel och naturlig i teorin men svår att räkna med i praktiken.

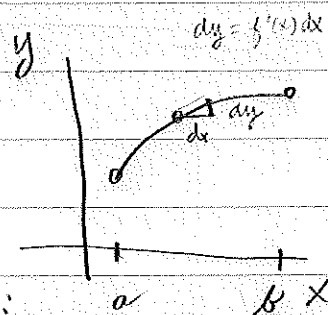
exempel (halvcirkeln)

$$\begin{cases} x = a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \\ y = a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \end{cases} \quad s \in [0, \pi a]$$



exempel (graf i planet)

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$



○ Välj x som parameter $t = x$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

$$\vec{r}(t) = \vec{i} + f'(t)\vec{j}, \quad v(t) = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \quad \text{eller}$$

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$