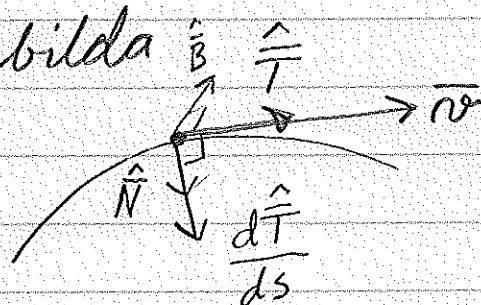


11.4 Krökning (endast sid 642-644)

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Om $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$ kan vi bilda enhets tangenten:

$$\hat{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|}$$



Med båglängdsparametrisering:

$$\hat{T}(s) = \frac{\vec{v}(s)}{v(s)} = \vec{v}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$\underbrace{v(s)}_{=1}$

Obs att $\hat{T}(s) \cdot \hat{T}(s) = |\hat{T}(s)|^2 = 1$

Derivera:

$$2 \cdot \hat{T}(s) \cdot \hat{T}'(s) = 0, \text{ dvs } \hat{T}'(s) \perp \hat{T}(s)$$

Se figur!

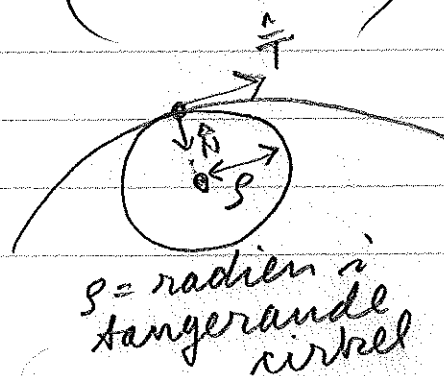
Definition 1 Kurvans krökning

är $\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{T}}{ds}(s) \right|$

($\kappa = \text{krökning}$)

Krökningsradien är

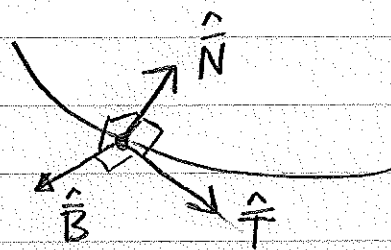
$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$



$\rho = \text{radien i tangerande cirkel}$

Enhetsnormalen är

$$\hat{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{\frac{d\hat{T}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{T}}{ds} \right|}$$



Enhetsbinormalen är (sid 646)

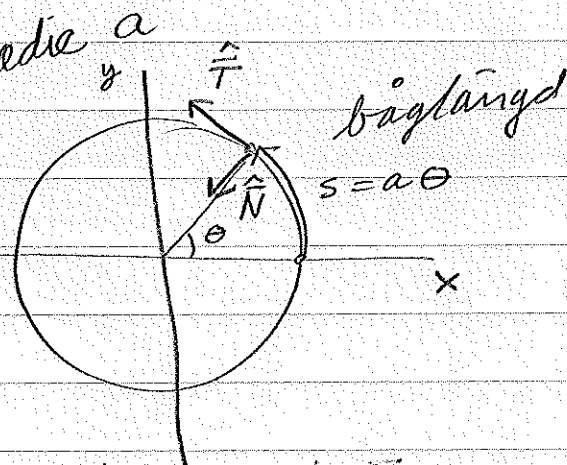
$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

Exempel cirkeln med radi a

$$\vec{r} = a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \vec{i} + a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \vec{j}$$

$$\hat{T} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\sin\left(\frac{s}{a}\right) \vec{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right) \vec{j}$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = -\frac{1}{a} \cos\left(\frac{s}{a}\right) \vec{i} - \frac{1}{a} \sin\left(\frac{s}{a}\right) \vec{j} = -\frac{1}{a^2} \vec{r}$$



$$\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{T}}{ds} \right| = \frac{1}{a}$$

$$\rho(s) = a$$

$$\hat{N}(s) = -\frac{1}{a} \vec{r}(s) = -\frac{\vec{r}(s)}{|\vec{r}(s)|} = -\hat{r}(s)$$

$$\hat{B}(s) = \hat{T} \times \hat{N} = \vec{k}$$

Man kan definiera kurvans torsion genom att beräkna $\frac{d\hat{B}}{ds}$ (sid 646).
Vi nöjer oss med brötning.

11.5 Endast sid 649 och

Example 2 sid 651.

(3)

Krökning i andra parametriseringar.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=\hat{T}} = v \hat{T} \quad (\text{kedjeregeln!})$$

hoppa över

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{T} + v \frac{d\hat{T}}{dt} \quad (\text{produktregeln!})$$

$$= \frac{dv}{dt} \hat{T} + v \underbrace{\frac{d\hat{T}}{ds} \frac{ds}{dt}}_{=\kappa \hat{N}} = v \kappa \hat{N}$$

$$= \frac{dv}{dt} \hat{T} + v^2 \kappa \hat{N}$$

$$\bar{v} \times \bar{a} = v \frac{dv}{dt} \underbrace{\hat{T} \times \hat{T}}_{=\vec{0}} + v^3 \kappa \hat{T} \times \hat{N}$$

$$= v^3 \kappa \hat{T} \times \hat{N} = v^3 \kappa \hat{B}$$

Denne formel kan användas för att beräkna κ .

$$|\bar{v} \times \bar{a}| = v^3 \kappa |\hat{B}| = v^3 \kappa$$

$$\kappa = \frac{|\bar{v} \times \bar{a}|}{v^3}$$

← Endast denna formel (utan bevis).

Exempel 2 sid 621

(4)

Graf $y = f(x)$, Parameter x .
 $\vec{r} = x\vec{i} + f(x)\vec{j}$

$$\vec{v} = \vec{r}' = \vec{i} + f'(x)\vec{j}, \quad v = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$\vec{a} = f''(x)\vec{j}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = f''(x)\vec{k}$$

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3} = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

(Mikael Enelund kommer att visa en annan härledning av denna viktiga formel.)

12.1 Funktion av flera variabler.

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_m), \quad x = (x_1, \dots, x_m)$$

$$f: D(f) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{målmängd (target set)} = \mathbb{R}$$

$$R(f) = \text{värdemängden}, \quad R(f) \subset \mathbb{R}$$

$$D(f) = \text{definitionsområdet}, \quad D(f) \subset \mathbb{R}^m$$

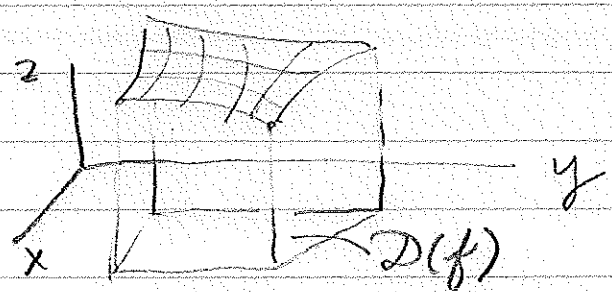
Om 2 eller 3 variabler skriver vi ofta

$$f(x, y), \quad f(x, y, z).$$

Graf (av två-variabel funktion)

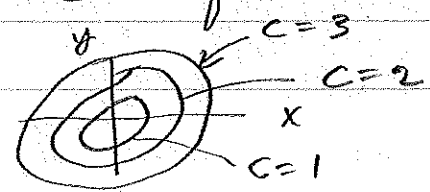
Plotta $z = f(x, y)$ i (x, y, z) -rummet.

Yta.



Nivåkurvor ("level curves")

Plotta $f(x, y) = c$ för olika c .



Öbörövning!

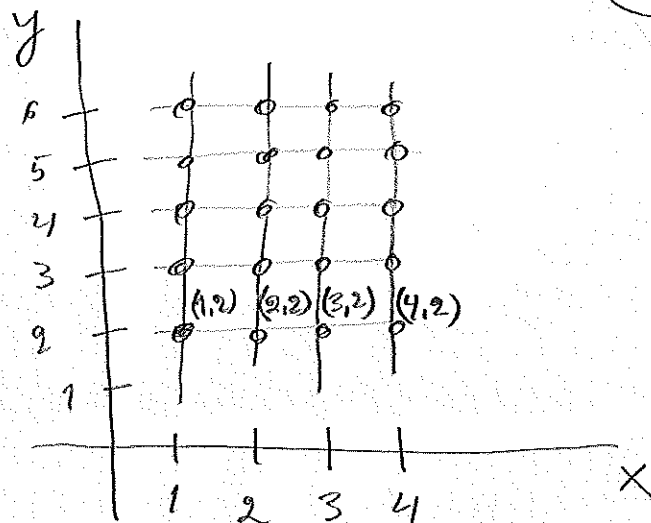
Datorövning 1

(5/6)

$$>> X = 1:4$$

$$>> y = 2:6$$

$$>> [X, Y] = \text{meshgrid}(x, y)$$



$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Skapar nät i planet som kan användas för att plotta graf $z = f(x, y)$.

$$>> Z = X .* Y .^ 2$$

$$(z = xy^2)$$

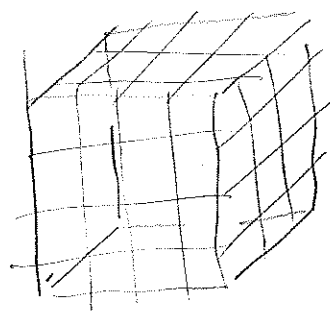
$$>> \text{mesh}(X, Y, Z)$$

Nät i rummet:

$$>> [X, Y, Z] = \text{meshgrid}(x, y, z)$$

$$>> V = f(X, Y, Z) \quad (v = f(x, y, z))$$

$$>> \text{isosurface}(X, Y, Z, V, 0)$$

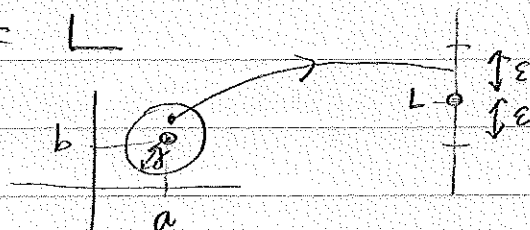


12.2 Gränsvärde och kontinuitet

Definition 2 Vi säger att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

om

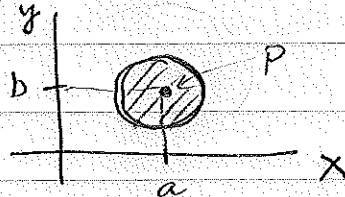


(i) varje omgivning av (a, b) innehåller punkter i $D(f)$ som är skilda från (a, b)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ sådant att

$$\begin{cases} (x, y) \in D(f) \\ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

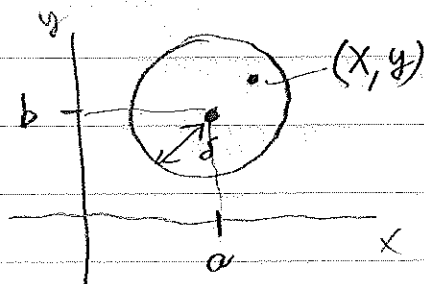
Repetera 10.1: en omgivning ^{neighborhood} av $P = (a, b)$ är en öppen cirkelskiva (disk)



Obs: Om avståndet mellan (x, y) och (a, b) är mindre än δ ,

$$|(x-a)\bar{i} + (y-b)\bar{j}| < \delta$$

så blir $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.



Exempel $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ när $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

Typ " $\frac{0}{0}$ ".

$$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \neq (0, 0)\}$$

På x-axeln ($y=0$): $f(x, y) = f(x, 0) = 0 \rightarrow 0, x \rightarrow 0$

På y-axeln ($x=0$): samma

På linjen $y=x$: $f(x, y) = f(x, x) = \frac{2x^2}{2x^2} = 1, x \rightarrow 0$

Gränsvärdet $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ existerar ej.

Exempel $\lim_{(x, y) \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$

Beweis

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} |y| \leq$$

$$\leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Definition 3 Funktionen f är kontinuerlig i (a, b) om

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$