

12.3 Partiella derivatorDefinition 4

De partiella derivatorna av $f(x, y)$ med avseende på x och y är

$$f_1(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_2(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

Exempel

$$f(x, y) = x^3 y^2 + x$$

$$f_1(x, y) = 3x^2 y + 1$$

$$f_2(x, y) = 2x^3 y$$

Beteckningar

$$z = f(x, y)$$

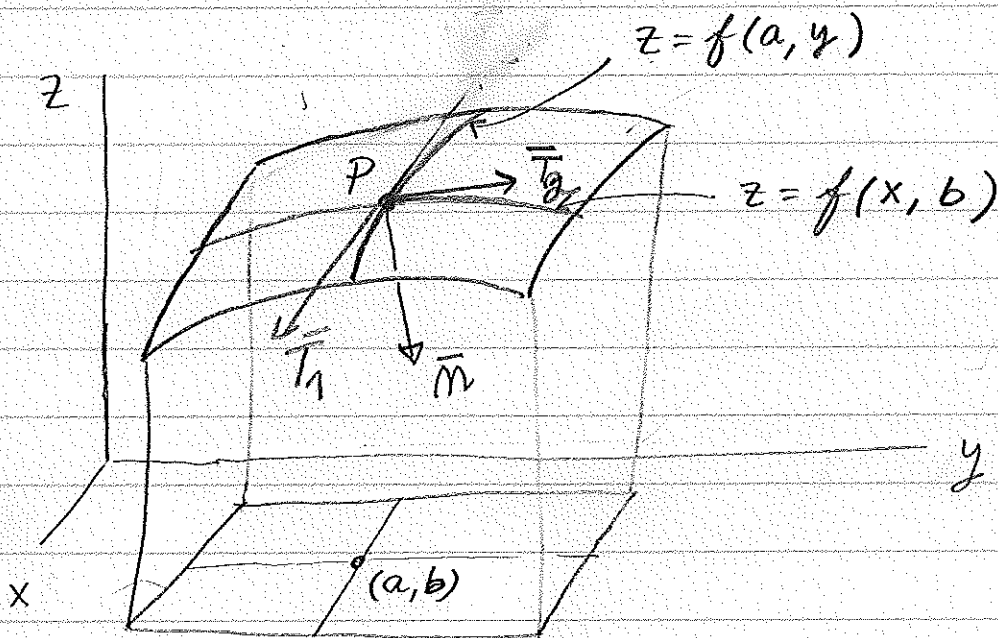
$$f_1(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = D_1 f(x, y) = D_x f(x, y)$$

$$f_2(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = D_2 f(x, y) = D_y f(x, y)$$

Tangentplan och normal till yta

Graf: $z = f(x, y)$

$$P = (a, b, f(a, b))$$



Two curves on the surface: $z = f(x, b)$ and $z = f(a, y)$
In parameter form:

$$\vec{r} = x \vec{i} + b \vec{j} + f(x, b) \vec{k}$$

$$\vec{r} = a \vec{i} + y \vec{j} + f(a, y) \vec{k}$$

Tangent vectors in P:

$$\vec{T}_1 = \frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{i} + f_1(a, b) \vec{k}$$

$$\vec{T}_2 = \frac{d\vec{r}}{dy} = \vec{j} + f_2(a, b) \vec{k}$$

They span the tangent plane in P.
A normal vector is given by

$$\vec{m} = \vec{T}_2 \times \vec{T}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & f_2(a,b) \\ 1 & 0 & f_1(a,b) \end{vmatrix} =$$

$$= f_1(a,b) \vec{i} + f_2(a,b) \vec{j} - \vec{k}$$

○ Tangentplanetets ekvation:

$$○ \quad f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) - (z-f(a,b)) = 0$$

Detta är alltså ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $P = (a,b,f(a,b))$.

○ Senare ska göra detta på annat sätt, med hjälp av gradientvektor.

12.4 Derivator av högre ordning.

Rena andra-derivator ^{av $z = f(x, y)$} med avseende på x och y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x, y) = f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = f_{22}(x, y) = f_{yy}(x, y)$$

Bländade derivator med avseende på x och y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = f_{12}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

Detta är beteckningar enligt Adams.

Man borde nog beteckna derivator med "prim", dvs

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(x, y) = f'_x(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{21}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

och så vidare. Så att man inte förväxlar med vektor- och matris-index, t.ex.,

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

Exempel

$$f(x, y, z) = z^2 e^{x-y}$$

$$f'_1(x, y, z) = z^2 e^{x-y}$$

$$f'_2(x, y, z) = -z^2 e^{x-y}$$

$$f'_3(x, y, z) = 2z e^{x-y}$$

$$f''_{31}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f'_3 = 2z e^{x-y}$$

$$f''_{13}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} f'_1 = 2z e^{x-y}$$

$$f'''_{133}(x, y, z) = 2e^{x-y}, \quad f'''_{313} = 2e^{x-y}$$

Obs att $f''_{31} = f''_{13}$, $f'''_{133} = f'''_{313}$ här. Det är ingen slump.

Sats 1 (Blandade derivator är lika.)

Antag att två blandade derivator av ordning n består av samma derivator i olika ordning. Om dessa är kontinuerliga i P och alla derivator av lägre ordning är kontinuerliga i en omgivning till P så är de två blandade derivatorna lika i P .

Utan bevis.

(6)
En lite enklare (men svagare) formulering:

Om alla partiella derivator till f är kontinuerliga i en omgivning till P så spelar det ingen roll i vilken ordning man beräknar de blandade partiella derivatorna.

Exempel 3 (Laplace ekvation)

Visa att $z = e^{kx} \cos(ky)$ ($k \in \mathbb{R}$)

uppfyller den partiella differential-
ekvationen (PDE)

$$\left[e^{kx} \cos(ky) = \operatorname{Re} e^{k(x+iy)} \right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Beweis: $\frac{\partial z}{\partial x} = k e^{kx} \cos(ky)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 e^{kx} \cos(ky)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -k e^{kx} \sin(ky), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k^2 e^{kx} \cos(ky)$$

så att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k^2 e^{kx} \cos(ky) - k^2 e^{kx} \cos(ky) = 0$$

Exempel 4 (Vågekvationen)

(7)

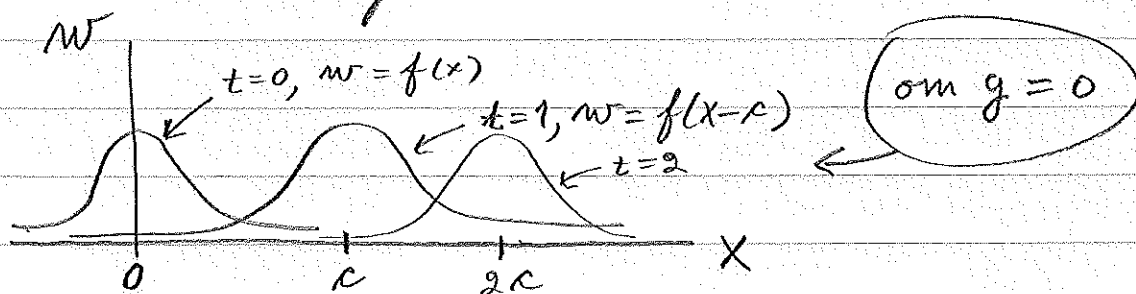
Funktionen

$$w = f(x - ct) + g(x + ct)$$

uppfyller PDE:n

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Här betyder termen $f(x - ct)$ en våg som rör sig åt höger med hastigheten c .



Termen $g(x + ct)$ är en våg som rör sig åt vänster.