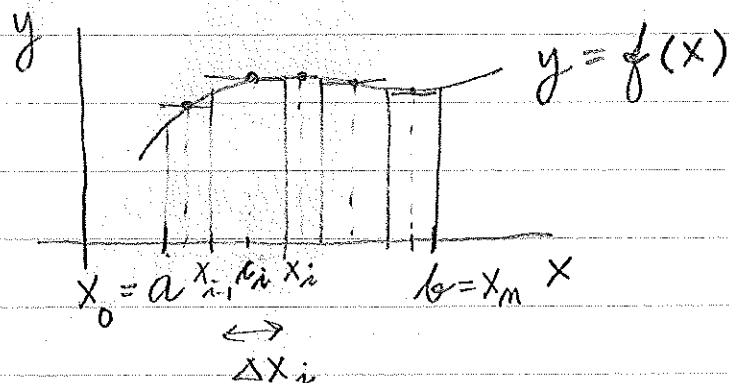


14.1 Dubbelintegralen

Kom ihåg enkeltintegralen (Adams 5.3):



$$\|P\| = \max \Delta x_i$$

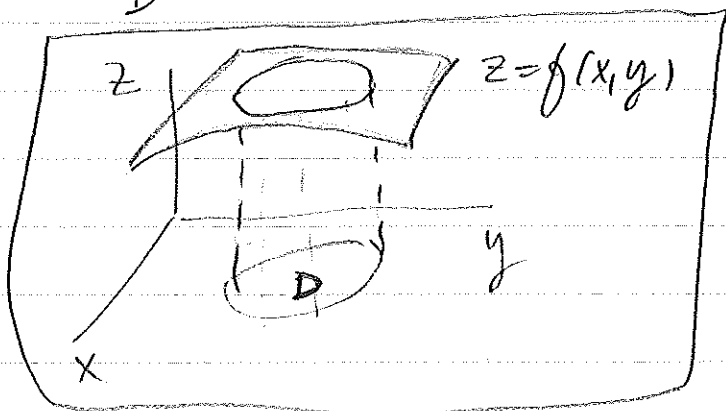
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(c_i) \Delta x_i \quad (\text{Riemann-summa})$$

= arean under grafen
om $f(x) \geq 0$.

Vi ska nu definiera dubbelintegralen:

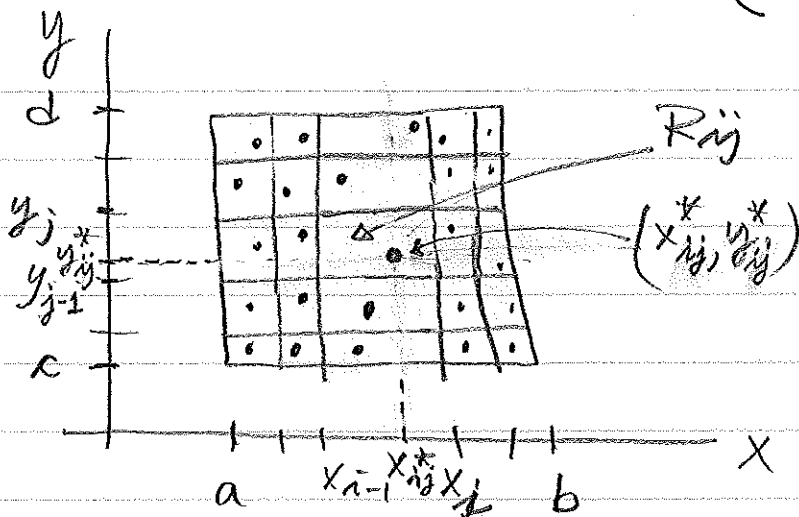
$$\iint_D f(x, y) dA = \text{volymen under grafen } z = f(x, y)$$

om $f(x, y) \geq 0$.



basen D
höjden z

Rektangel $D =$
 $= \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$



Partition $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M-1} < x_M = b$

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{N-1} < y_N = d$

(Matlab: meshgrid)

Rektangel: $R_{ij}: x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j$

Area: $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$

Diameter: $\text{diam}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}$

Norm: $\|P\| = \max \text{diam}(R_{ij})$

Godtycklig punkt: $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$

Riemann-summa:

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$$

Definition 1

Funktionen f är integrerbar
 över rektangeln D med
 dubbelintegralen

$$I = \iint_D f(x, y) dA$$

om gränsvärdet

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P) = I$$

Obs: area-
elementet

$$dA = dx dy$$

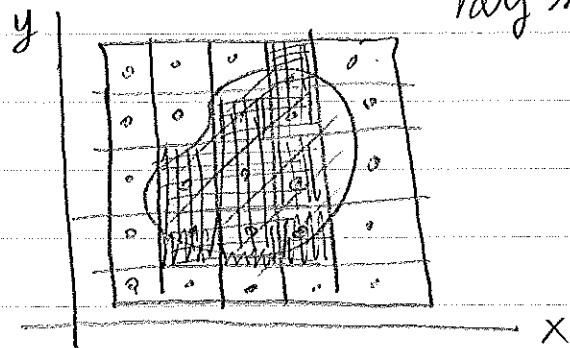
$$= dy dx$$

$$\approx \Delta x_i \Delta y_j$$

existerar för varje val av
 punkter $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$.

Allmänt begränsat område:

Välj stor rektangel R så att $D \subset R$.



Bilda funktionen

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{om } (x, y) \in D \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Definition 2 Dubbelintegralen över
 allmänt begränsat område

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R \hat{f}(x, y) dA$$

egenskaper

a) $\iint_D f(x,y) dA = 0$ om $\text{area}(D) = 0$

b) $\text{area}(D) = \iint_D 1 dA$

c) volym: om $f(x,y) \geq 0$ på D

så är $\iint_D f(x,y) dA = \text{volymen}$

under grafen $z = f(x,y)$.

d) om $f(x,y) \leq 0$ så är $\iint_D f(x,y) dA = -\text{volymen}$

e) linjär kombination bevaras:

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)) dA =$$

$$= \alpha \iint_D f(x,y) dA + \beta \iint_D g(x,y) dA$$

f) olikhet bevaras: $f(x,y) \leq g(x,y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y) dA \leq \iint_D g(x,y) dA$$

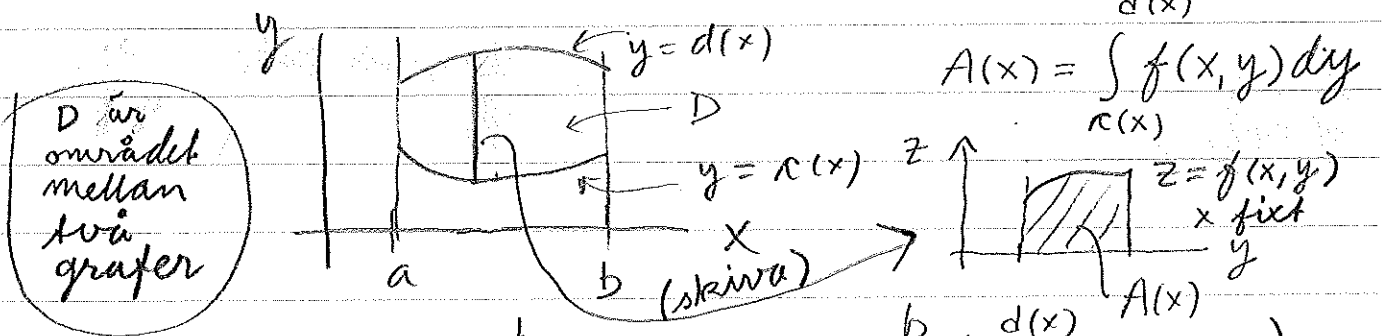
g) triangelolikheten: $|\iint_D f(x,y) dA| \leq \iint_D |f(x,y)| dA$

h) additivitet av områden: $D = D_1 \cup D_2$ ^{ej överlapp}
 $\iint_D f(x,y) dA = \iint_{D_1} f(x,y) dA + \iint_{D_2} f(x,y) dA$

14.2 Beräkning av dubbelintegralen med upprepad integration.

Denna metod fungerar om området D är enkelt i x eller y .

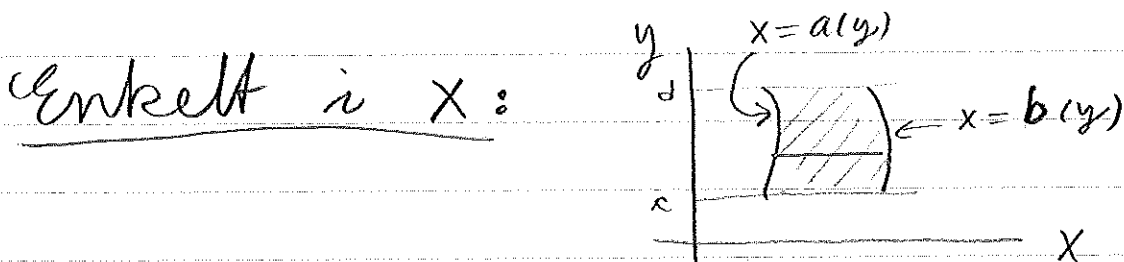
enkelt i y : $a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)$



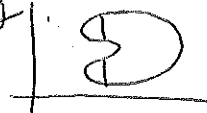
$$\iint_D f(x,y) dA = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

= { skrivs
ofta utan parenteser }

$$= \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy dx = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) dy$$

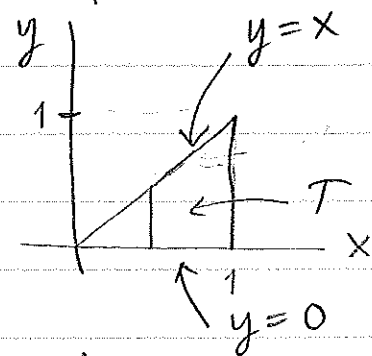


$$\iint_D f(x,y) dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) dx dy$$

Ej enkelt i y:  dela upp:  (6)

Exempel. Beräkna $\iint_T xy \, dA$.

Triangeln T är både enkelt i x och y .

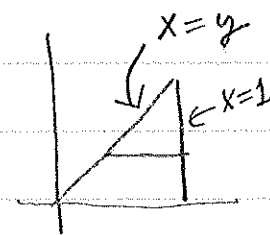


$$\iint_T xy \, dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xy \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x \int_0^x y \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^x dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}$$

$$\iint_T xy \, dA = \int_0^1 \left(\int_y^1 xy \, dx \right) dy$$



$$= \int_0^1 y \int_y^1 x \, dx \, dy = \int_0^1 y \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^1 dy$$

$$= \int_0^1 y \frac{1-y^2}{2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y - y^3) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}$$

14.3 • Generaliserad dubbelintegral.
(improper)

• Medelvärdessatsen

Integralen $\iint_D f(x, y) dA$ är
definierad om f är kontinuerlig
och begränsad och D är ett
begränsat område.

Dvs om både f och D
"håller sig borta från
oändligheten".

Om någon av dem är obegränsad
så säger vi att $\iint_A f(x, y) dA$

är generaliserad (improper).

En sådan kan vara konvergent
eller divergent.

8
Positiv integrand $f(x, y) \geq 0$.

Om integranden $f(x, y) \geq 0$
så är integralen antingen

konvergent: $\iint_D f(x, y) dA = I$

eller divergent mot ∞ :

$$\iint_D f(x, y) dA = \infty.$$

• Då kan man avgöra konvergens/divergens
genom upprepad integration.

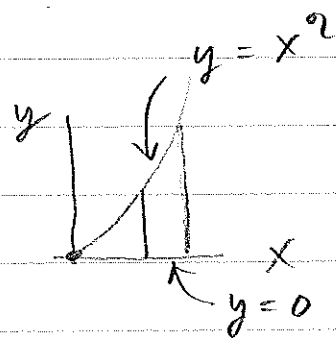
• Om $f(x, y)$ har både pos. och
negativa värden så funkar inte
detta: $\iint f(x, y) dx dy$ och $\iint f(x, y) dy dx$
kan ge olika resultat.

Exempel 3

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2} \geq 0$$

$$f(x, y) \rightarrow \infty \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$



$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2} dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2} dy dx =$$

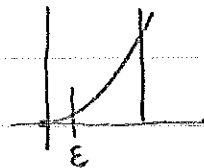
$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln(1+x) \right]_{x=0}^1 = \ln 2.$$

Konvergent. Egentligen borde vi räkna så här:

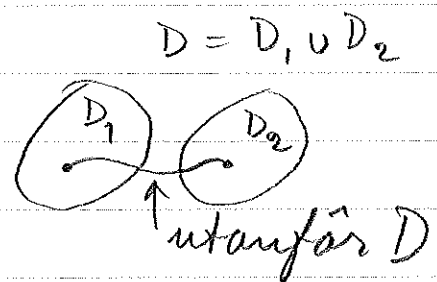
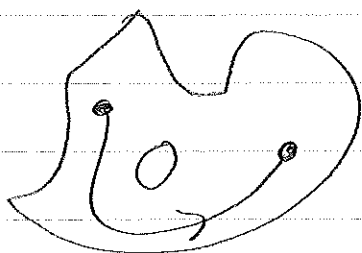
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2} dy dx$$



Medelvärden

D är sammanhängande (connected)

om två godtyckliga punkter i D alltid kan förbindas med en kurva i D .



(Medelvärdessats för integral)

110

Sats 3

Antag: D slutet begränsat, och
sammanshängande
område

• f kont. i D

Då finns punkt $(x_0, y_0) \in D$
sådan att

$$\iint_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0) \cdot \text{area}(D)$$

Man bevis.

Dividera med arean:

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x, y) dA = \\ &= \text{medelvärde av } f \\ &\quad \text{över } D. \end{aligned}$$

Dvs f kan inte hoppa över sitt
medelvärde.