

FÖ 4.1 2012-04-16

Finite elementmetoden i 1-D

Randvärdesproblem:

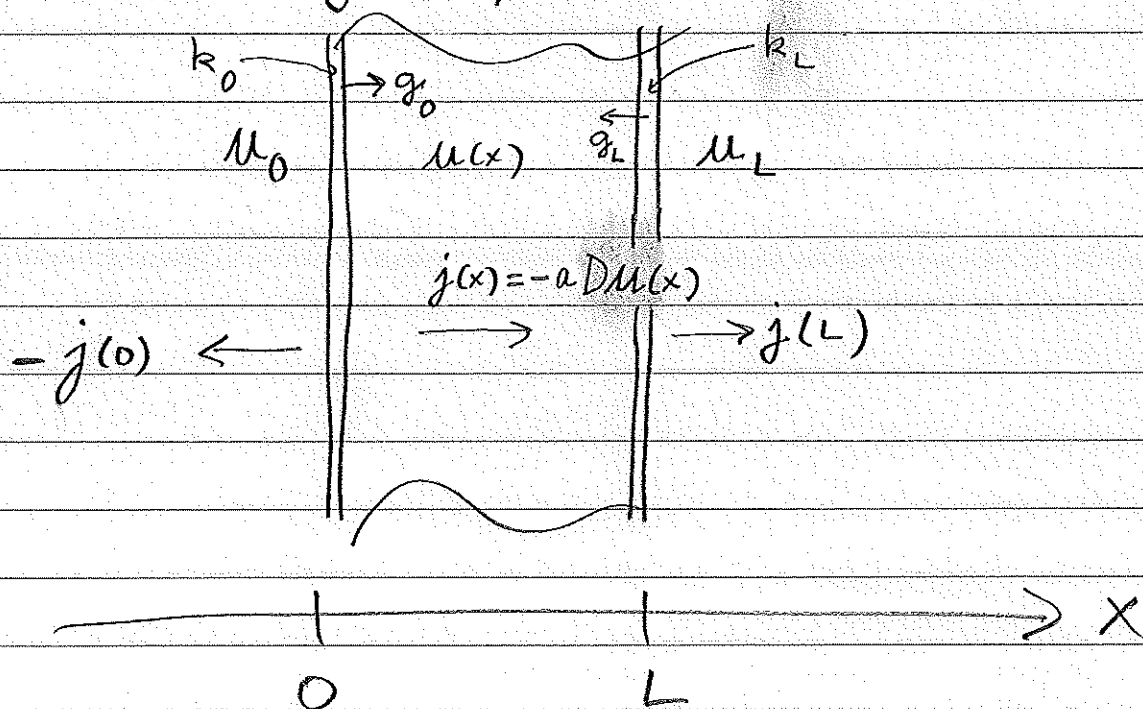
Finns $u = u(x)$ sådan att

$$\begin{cases} -D(aDu) = f & \text{för } x \in I = (0, L) \\ a D_N u + k(u - u_A) = g & \text{för } x = 0, L \end{cases}$$

$$D_N = \begin{cases} -\frac{d}{dx}, & x=0 \\ \frac{d}{dx}, & x=L \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} k_0 \\ k_L \end{cases}, \quad u_A = \begin{cases} u_0 \\ u_L \end{cases}, \quad g = \begin{cases} g_0 \\ g_L \end{cases}$$

Värmeledning i platta:



Swag formulering:

Finn $u = u(x)$ sådan att

$$\int_0^L a D u D v dx + k_0 u(0) v(0) + k_L u(L) v(L) =$$

$$= \int_0^L f v dx + (k_0 u_0 + g_0) v(0) + (k_L u_L + g_L) v(L)$$

för alla testfunktioner $v = v(x)$.

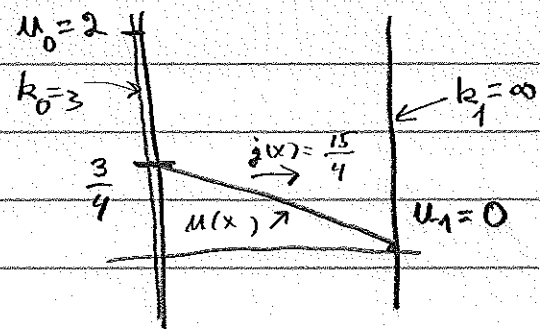
Exempel

$$\begin{cases} -D(5 Du) = 0 & i \quad I = 0,1 \\ -5 u'(0) + 3(u(0) - 2) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Kan lösas genom att integrera två gånger:

$$u(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(1-x)$$

$$j(x) = -5 u'(x) = \frac{15}{4}$$



svag form:

Finns $u = u(x)$ sådan att
 $u(1) = 0$ och

$$\int_0^1 5 u'(x) v'(x) dx + 3(u(0) - 2)v(0) = 0$$

för alla v med $v(1) = 0$.

För M: läs om stängens ekvation sid 4.

Finite elementmetoden

Beräkna en approximativ lösning

$U = U(x)$ som är en styckvis

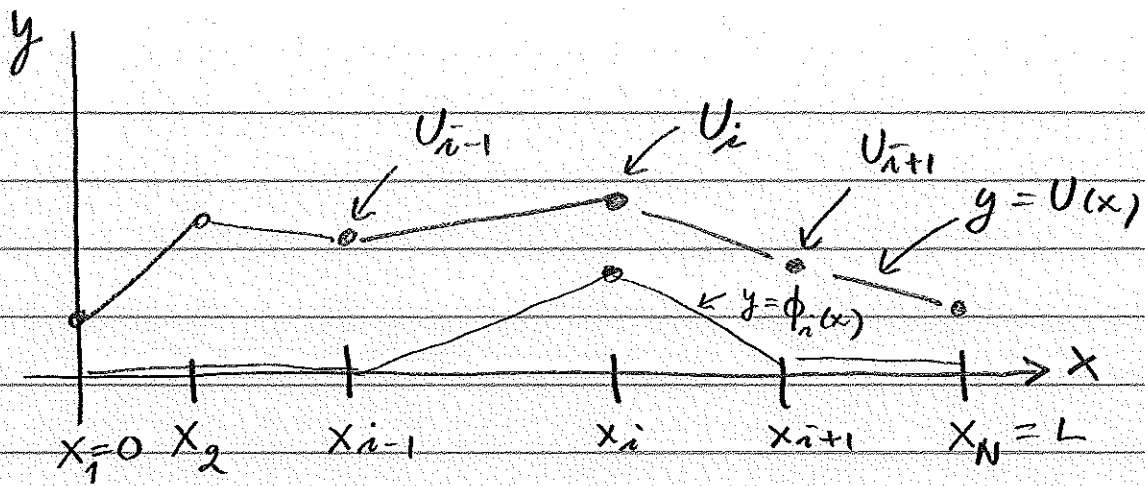
linjär funktion.

Nät: $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_N = L$

(N punkter (noder))

Intervall: $I_i = (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, \dots, N-1$

Steg: $h_i = x_{i+1} - x_i$



Basfunktioner: $\phi_i = \phi_i(x)$

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

U är linjär kombination av ϕ_i :

$$U(x) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x)$$

Obs att

$$U(x_j) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x_j) = U_j$$

Fler ska vi bestämma de
okända nod-värdena U_i ?

Använd den svaga formuleringen med testfunktionerna $v = \phi_j$.

För enkelhets skull: $k_0 = k_L = 0$, $g_0 = g_L = 0$.

$$\int_0^L a Du Dv dx = \int_0^L f v dx$$

sätt in $U(x) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x)$

och $v = \phi_j$, $j = 1, \dots, N$.

U_i får

$$\sum_{i=1}^N U_i \underbrace{\int_0^L a D\phi_i D\phi_j dx}_{= a_{ij} = a_{ji}} = \underbrace{\int_0^L f \phi_j dx}_{= b_j}$$

$$\sum_{i=1}^N a_{ji} U_i = b_j, \quad j = 1, \dots, N$$

$$AU = b$$

A är styvhetsmatrisen $N \times N$

b är lastvektorn $N \times 1$

A är symmetrisk ($a_{ij} = a_{ji}$)

och tridiagonal:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & & & 0 \\ * & * & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & * \\ & & & * & * \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet ställs upp

och löses av datorprogrammet

MyPoissonSolver.m i

Datorövning 4.