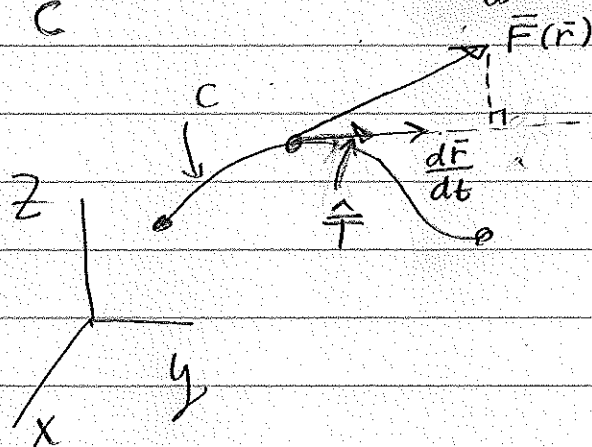


Tangentkurvintegral

(10)

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$



Obs att

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\substack{= \hat{T} \\ = \text{enhetstangenten}}} \underbrace{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|}_{ds} dt$$

$$= \int_C \vec{F} \cdot \hat{T} ds$$

där $\vec{F} \cdot \hat{T}$ är skalära projektionen av $\vec{F}$ på tangentriktningen.

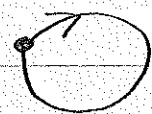
Vektorbåglängds elementet: $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \hat{T} ds$

Exempel $\vec{F}$ kraftfält. Arbetet som utföras då en partikel rör sig längs C i kraftfältet $\vec{F}$ är

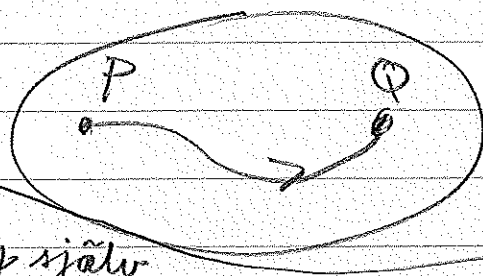
$W =$ kraftens komponent i rörelseriktningen gånger sträckan.

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \hat{T} ds$$

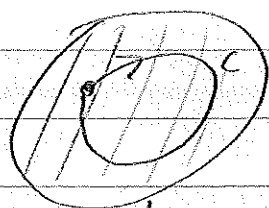
D är ett sammanhängande område
(i rummet eller planet) om
varje par av punkter P, Q i D
kan förbindas med en kurva
i D .

C sluten = 

C enkel = korsar inte sig själv

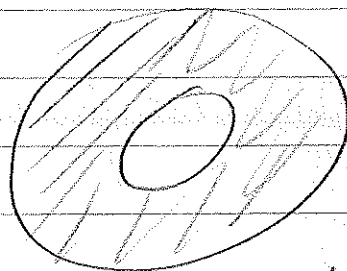


D är enkelt sammanhängande
om varje enkel sluten kurva
i D kan ^{kontinuerligt} krympas till en
punkt utan lämna D .
Då finns en yta i D vars rand är C .



enkelt

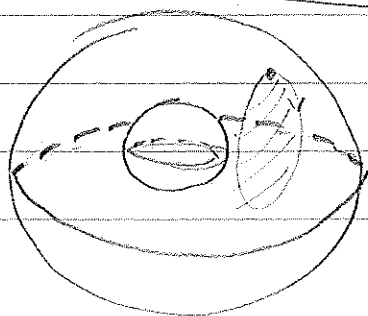
sammanhängande



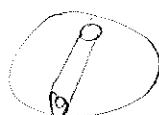
hålskiva

i planet

är sammanhängande
men ej enkelt



klot med hål i rummet
är enkelt sammanhängande



genomborrat klot är ej
enkelt sammanhängande

Sats 1 (oberoende av vägen)

(3)

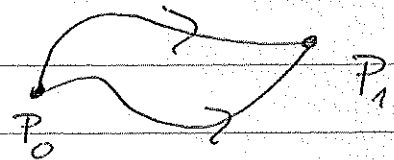
Antag D är enhelt sammanhängande och $\vec{F}$ ett vektorfält i D .

Då är följande påståenden ekvivalenta.

a) $\vec{F}$ är konservativt i D

b) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ för varje slutna kurva C i D

c) För varje par av punkter P_0, P_1 i D har $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ samma värde för alla kurvor C i D från P_0 till P_1 .



Vi bevisar endast att a) $\Rightarrow$ c).

Antag då att a) är sant, dvs $\vec{F} = \nabla \phi$ i D .

Tag kurva C i D från P_0 till P_1 .

$$\text{Då blir } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla \phi(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \quad (4)$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\vec{r}(t)) dt = \left[\phi(\vec{r}(t)) \right]_{t=a}^b =$$

$$= \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a)) = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

⊖ dvs den beror bara av ändpunkterna
 Men inte C . Arbetet av konservativt
kraftfält är ändringen i potentialen
 $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0)$

Flytta till sidan 5!

Exempel Graf $z = f(x, y)$.

Välj parametrar $u = x$, $v = y$.

Parametrisering:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

15,5 Ytintegral. (endast sid 870-878) (5)

Yta $\mathcal{S}$ på parameterform:

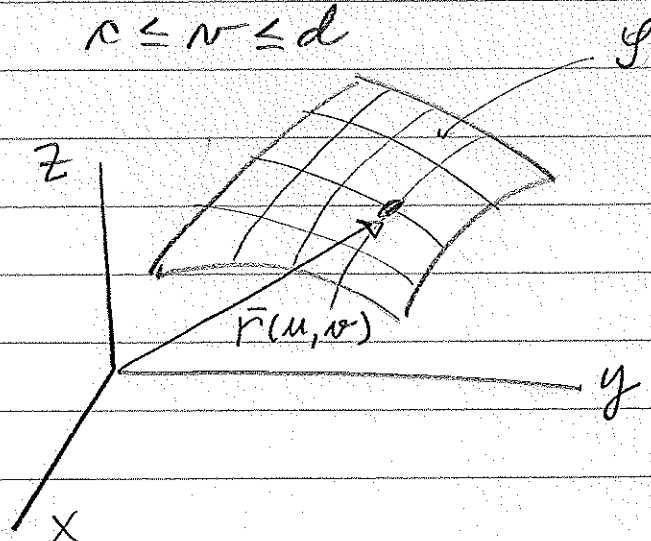
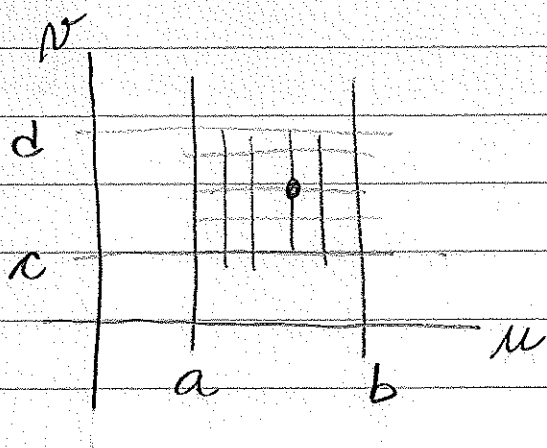
$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d$$

eller

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$a \leq u \leq b$$

$$c \leq v \leq d$$



exempel Sfär: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

I sfäriska koordinater:
$$\begin{cases} \rho = R \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

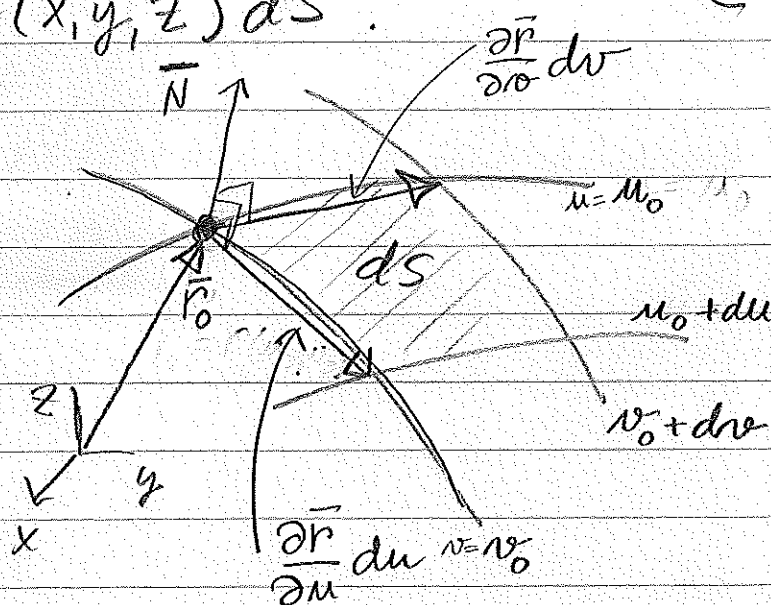
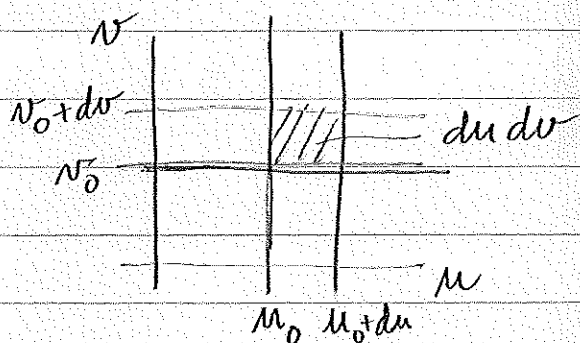
Parametrisering:

$$\begin{cases} x = R \sin \phi \cos \theta \\ y = R \sin \phi \sin \theta \\ z = R \cos \phi \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \phi \leq \pi \\ 0 &\leq \theta < 2\pi \end{aligned}$$

exempel Graf se sid 4.

ytintegral $\iint_S f(x, y, z) dS$.

(6)



Areaelementet:

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$$

Obs att $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ och $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$

är tangenter till koordinatkurvorna

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v_0), \quad a \leq u \leq b$$

$$\vec{r} = \vec{r}(u_0, v), \quad c \leq v \leq d$$

De är då också tangenter till ytan S i punkten $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$.

En normalvektor:

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

BeispielGraf: $z = f(x, y)$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Tangenten: $\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{i} + 0\vec{j} + f'_x(u, v)\vec{k} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 0\vec{i} + \vec{j} + f'_y(u, v)\vec{k} \end{cases}$

Ein Normalvektor

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x \vec{i} + f'_y \vec{j} + \vec{k}$$

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv =$$

$$= \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} du dv$$

oder $dS = \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy$

Exempel Sfären

$$\begin{cases} x = R \sin \phi \cos \theta \\ y = R \sin \phi \sin \theta \\ z = R \cos \phi \end{cases}$$

Tangenter:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = R \cos \phi \cos \theta \vec{i} + R \cos \phi \sin \theta \vec{j} - R \sin \phi \vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -R \sin \phi \sin \theta \vec{i} + R \sin \phi \cos \theta \vec{j} + 0 \vec{k} \end{cases}$$

En normalvektor

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos \phi \cos \theta & R \cos \phi \sin \theta & -R \sin \phi \\ -R \sin \phi \sin \theta & R \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 \sin^2 \phi \cos \theta \vec{i} + R^2 \sin^2 \phi \sin \theta \vec{j} +$$

$$+ (R^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta + R^2 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta) \vec{k}$$

= 1

$$= R \sin \phi (R \sin \phi \cos \theta \vec{i} + R \sin \phi \sin \theta \vec{j} + R \cos \phi \vec{k})$$

$$= R \sin \phi \vec{r}$$

$$dS = |R \sin \phi \vec{r}| d\phi d\theta = R^2 \sin \phi d\phi d\theta$$

Kom ihåg $dV = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$. $\left\{ \begin{matrix} r=R \\ \phi=0 \end{matrix} \right\}$

Exempel Sfärens area

$$\iint_S ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta =$$

$$= R^2 \int_0^{\pi} \sin \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= R^2 \left[-\cos \phi \right]_0^{\pi} \cdot 2\pi = 4\pi R^2$$

Viktigt: kunna parametrisera

och beräkna $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$

och ds i följande fall

- graf $z = f(x, y)$
- cylindriska koordinater
- sfäriska koordinater

15.6 Flödesintegral

En yta är orienterbar om det finns en normalvektor $\vec{N}(P)$ som varierar kontinuerligt när P rör sig på ytan.

(Möbius band är ej orienterbar.)

Om S är orienterbar så definierar vi flödesintegralen (normalytintegralen) ("flux")

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{\vec{N}} \, dS$$

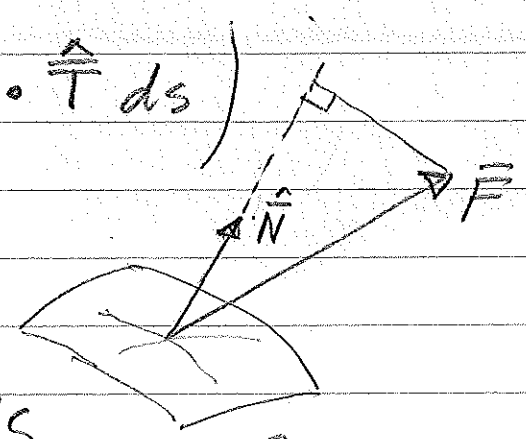
(Jämför: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \hat{\vec{T}} \, ds$)

$\vec{F} \cdot \hat{\vec{N}}$ = skalära proj.
= normalkomponenten

Hastighetsfält:

$$\iint_S \underbrace{\vec{v}}_{\left[\frac{m}{s}\right]} \cdot \underbrace{\hat{\vec{N}}}_{[m^2]} \, dS \quad \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

volymflödes ~~hastighet~~



$$\iiint_V \underbrace{\delta}_{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \underbrace{\vec{v}}_{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \underbrace{\hat{N}}_{\text{m}^2} dS = \text{massflödesfartighet}$$

$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

$$\delta \vec{v} \quad \text{massflödesfartighet} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \right]$$