

12.7 Gradient och riktningsderivata

(ej "Rates perceived..." sid 720)

J Fö 2.2:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Derivatan är

$$f'(a) = Df(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right] \text{ (radmatris)}$$

om f är deriverbar i a , dvs

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + f'(a)h)}{|h|} = 0.$$

Nu använder vi geometrisk beteckning,
och inför gradienten till $f(x,y)$ i (x,y) :

$$\nabla f(x,y) = f'_x(x,y) \bar{i} + f'_y(x,y) \bar{j}.$$

Obs att

- $\nabla f(x,y)$ är en vektorsvärd funktion (vektorfält)
- $f(x,y)$ är en skalärsvärd funktion (skalärfält)
- nabla operatören: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j}$

• nabla verkar på f :

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} \right) f \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j}\end{aligned}$$

• gradienten skrivs ofta $\overline{\text{grad}} f$
(jag gör inte det).

Exempel $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\bar{\nabla} f(x, y) = 2x \bar{i} + 2y \bar{j} = 2\bar{r}$$

Obs: $\bar{\nabla} f$ är ortogonal
mot nivåkurvorna

$$f(x, y) = C$$

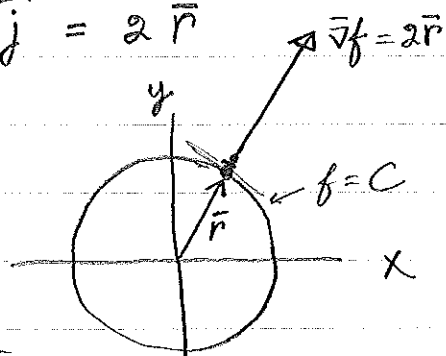
utom i origo där $\bar{\nabla} f(0, 0) = \bar{0}$.

(med bevis!)

Sats 6 Antag • f deriverbar i (a, b)
• $\bar{\nabla} f(a, b) \neq \bar{0}$

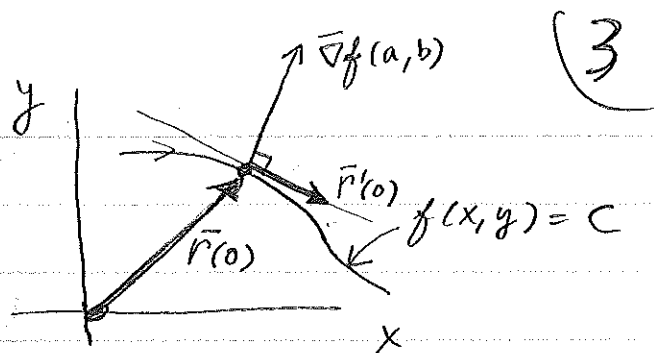
Då är $\bar{\nabla} f(a, b)$ en normalvektor
till nivåkurvan till f genom (a, b) .

Bewis Parametrisera nivåkurvan,
 $\bar{r} = x(t) \bar{i} + y(t) \bar{j}$, så att $x(0) = a$, $y(0) = b$.



eftersom $f(x, y) = C$ på kurvan så gäller

$$f(x(t), y(t)) = C = f(a, b)$$



(3)

Kedjeregeln ger nu

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) =$$

$$= f'_x(x(t), y(t)) x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) y'(t)$$

$$= \left(f'_x(x(t), y(t)) \bar{i} + f'_y(x(t), y(t)) \bar{j} \right) \cdot \left(x'(t) \bar{i} + y'(t) \bar{j} \right)$$

$$= \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \bar{r}'(t)$$

Speciellt med $t=0$ får vi

$$\nabla f(a, b) \cdot \bar{r}'(0) = 0$$

dvs gradienten $\nabla f(a, b)$ är ortogonal mot tangenten $\bar{r}'(0)$.

Obs: f måste vara deriverbar för att vi ska använda kedjeregeln. Det räcker inte att f är partiellt deriverbar.

Riktningsderivata

Låt $\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j}$ vara en enhetsvektor, dvs $|\vec{u}| = \sqrt{u^2 + v^2} = 1$.

Riktningsderivatan av f i (a, b) i riktningen $\vec{u}$ är

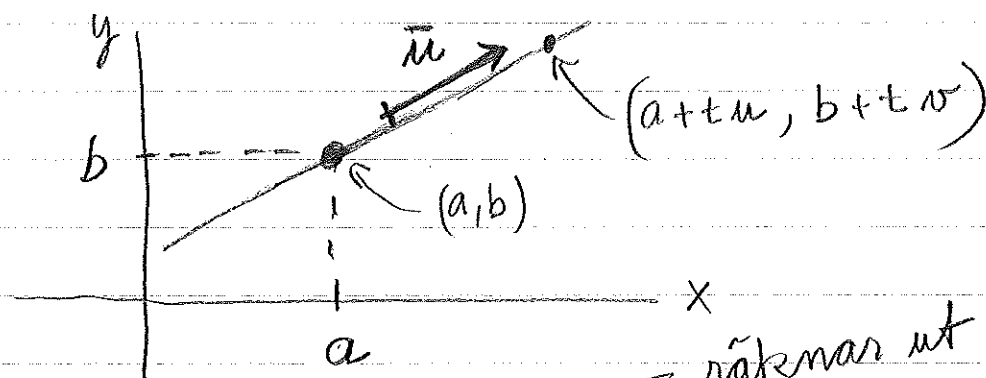
$$D_{\vec{u}} f(a, b) = \left. \frac{d}{dt} f(a + tu, b + tv) \right|_{t=0}$$

Obs: vi deriverar en-variabelfunktionen

$$g(t) = f(a + tu, b + tv) \quad \text{i punkten } t=0$$

dvs

$$D_{\vec{u}} f(a, b) = g'(0).$$



Funktionen $g(t)$ evalueras f längs rätta linjen genom (a, b) med riktningsvektorn $\vec{u}$.
 = räknas ut

5

Sats 7 (med bevis!) Om f är deriverbar
i (a,b) så gäller

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(a,b)$$

Bewis. Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dt} f(a+tu, b+tv) =$$

$$= f'_x(a+tu, b+tv)u + f'_y(a+tu, b+tv)v$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(a+tu, b+tv)$$

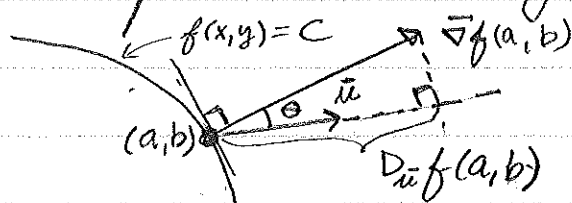
Med $t=0$ får vi

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(a,b).$$

Obs: $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(a,b)$ är den skalära projektionen

av gradientvektorn på riktningen $\vec{u}$.

(Se Adams 10.2.)



$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(a,b) = |\vec{\nabla} f(a,b)| \cos \theta$$

är maximal då $\vec{u}$ pekar längs $\vec{\nabla} f(a,b)$, $\cos \theta = 1$.

Alltså: $\vec{\nabla} f(a,b)$ pekar i den riktning där f ökar mest i (a,b) .

6

Skippa 12.8.

12.9 Taylors formel.

Endast Taylor-polynom av grad 2. (sid 703-709)

Kom ihåg Taylors formel i en variabel: $(x = a + h)$

$$F(x) = F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \frac{1}{2} F''(a)h^2 + R_2(a,h)$$

med $R_2(a,h) = \frac{1}{3!} F'''(s)h^3$ där s är mellan a och x .

Two variables: $x = a + h$, $y = b + k$

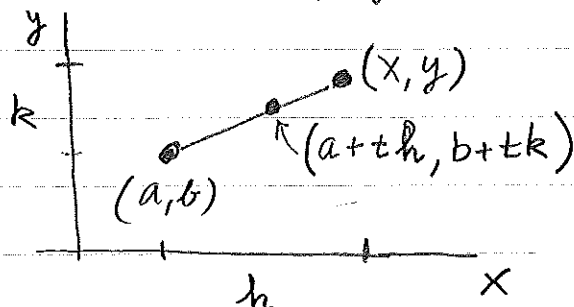
Bilda en en-variabelsfunktion genom att evaluera $f(x,y)$ längs räta linjen från (a,b) till (x,y) .

$$F(t) = f(a+th, b+tk)$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$F(0) = f(a,b)$$

$$F(1) = f(x,y) = f(a+h, b+k)$$



Skriv ned Taylors formel för F :

$$F(1) = F(0) + F'(0)1 + \frac{1}{2} F''(0)1^2 + \frac{1}{6} F'''(s)1^3$$

där $0 \leq s \leq 1$.

Här är (kedjeregeln!)

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(a+th, b+tk) =$$

$$= f'_x(a+th, b+tk)h + f'_y(a+th, b+tk)k$$

$$F'(0) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k =$$

$$= [f'_x(a, b) \quad f'_y(a, b)] \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$F''(t) = f''_{xx}(a+th, b+tk)h^2 +$$

$$+ f''_{xy}(a+th, b+tk)hk$$

$$\left(f''_{xy} = f''_{yx} \right)$$

$$+ f''_{yx}(a+th, b+tk)kh$$

$$+ f''_{yy}(a+th, b+tk)k^2$$

$$F''(0) = f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2$$

$$= [h, k] \begin{bmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{xy}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Taylor's polynom av grad 2:

$$P_2(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \\ + \frac{1}{2} \left(f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2 \right)$$

$$= f(a, b) + [f'_x(a, b), f'_y(a, b)] \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{xy}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Obs gradientvektorn:

$$\nabla f(a, b) = f'(a, b) = [f'_x(a, b) \quad f'_y(a, b)] \text{ rad}$$

och Hesse-matrisen:

$$D^2 f(a, b) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{xy}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{bmatrix} \text{ symmetrisk matris}$$

Taylor's formel (grad 2):

$$f(x, y) = P_2(x, y) + R_2(x, y)$$

$$\text{där } R_2(x, y) = F'''(s) = f'''_{xxx} h^3 + 3f'''_{xxy} h^2 k + \\ + 3f'''_{xyy} h k^2 + f'''_{yyy} k^3, \text{ där}$$

9

alla derivatorna evalueras i den (okända) mellanliggande punkten $(a+sh, b+sk)$, $0 \leq s \leq 1$.

(Resttermen kan ej skrivas matrisform. Varför?)

Mer allmänt: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$

$$f(x) = f(a+h) =$$

$$= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} h^T f''(a)h + R_2(x)$$

där $f'(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right]$

$$f''(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(a) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

symmetrisk: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Obs formen: $f(a+h) = f(a) + [\dots] \begin{bmatrix} \vdots \\ h \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [\dots] \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ h \end{bmatrix} + R$
 $= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} h^T f''(a)h + R$