

Fö 7.1 Extremvärdesproblem

(1)

Adams 13.1

Mycket ingenjörsarbete går i grunden ut på att optimera dvs minimera eller maximera en funktion. T. ex. maximera utbytet av en process, minimera materialåtgången, ...

Dvs $\max f(x)$

eller $\min f(x)$

Obs $\max f(x) = \min(-f(x))$.

Ofta många variabler:

$$\max f(x_1, \dots, x_n)$$

Det handlar om att sortera värdena, oerhört kostsam beräkning.

12
Ofta kan man ta en
genväg med flervariabel-
analys: i max-punkt
gäller

$$f'(x) = 0$$

Ekvationssystem, Newtons
metod.

Matematisk disciplin:

optimeringslära.

13.1 Extremvärden

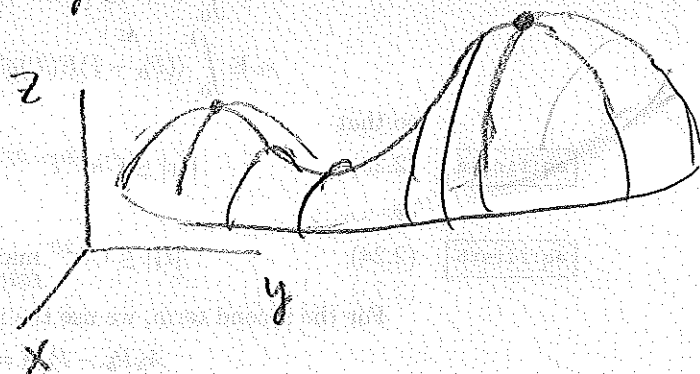
(3)

två variabler $z = f(x, y)$

Funktionen f har

lokalt maximum i (a, b) om

$f(x, y) \leq f(a, b)$ för alla $(x, y) \in D_f$
som är tilträckligt nära (a, b) .



Funkt. f har globalt maximum
i (a, b) om

$f(x, y) \leq f(a, b)$ för alla $(x, y) \in D_f$.

Extremvärde = maximum eller
minimum, dvs värdet $f(a, b)$.

Extrempunkt = punkten (a, b) där
extremvärdet inträffar.

Sats 1 (Nödvändiga villkor för extremvärde) (4)

Om f har extremvärde i (a, b)
så är (a, b) en av följande:

(a) kritisk punkt till f , dvs $\nabla f(a, b) = \vec{0}$,

(b) singulär punkt till f , dvs $\nabla f(a, b)$
existerar ej,

(c) randpunkt till D_f .

Beweis Antag att (a, b) är en punkt som
inte är en kritisk, singulär eller
randpunkt till f . Då är (a, b)
en inre punkt där $\nabla f(a, b)$ existerar
och $\nabla f(a, b) \neq \vec{0}$. Bilda riktningsvektorn
$$\vec{u} = \frac{\nabla f(a, b)}{|\nabla f(a, b)|}$$

derivatorna

$$D_{\vec{u}} f(a, b) > 0 \quad \text{och} \quad D_{-\vec{u}} f(a, b) < 0.$$

Dvs f ökar i en riktning och minskar
i en riktning när vi lämnar (a, b) .
Alltså: inget max eller min i (a, b) .

5
Alltså inget max. eller min. i (a, b) .

Lamma sak gäller i N -variabler: $f(x_1, \dots, x_N)$.

Satsen talar om i vilka punkter vi ska söka ~~extrem~~ punkter. Men den garanteras inte att det finns extrempunkter.

Sats 2 (Tillräckliga villkor för extremvärde.)

Om f är kontinuerlig och $D_f \subset \mathbb{R}^N$ är sluten och begränsad så finns punkter i D_f där f har max. och min.

absoluta
globala

(utan bevis)

Obs att funktionen $g(x) = x^T A x$, $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$,
är en kvadratisk funktion:

$$g(x) = [x_1, \dots, x_N] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{NN}x_N^2$$

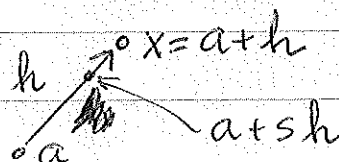
Kallas även kvadratisk form.

Beweis av Satz 3.

Taylor's formel av grad 1: ($x = a + h$)

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}h^T f''(a+sh)h$$

där $0 \leq s \leq 1$.



$$\text{på formen: } \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & 1 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Här är $f'(a) = 0$ (kritisk punkt),
så att

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}h^T f''(a+sh)h$$

Om $f''(a)$ är positivt definit så
 är även $f''(a+sh)$ positivt definit
 om $|h|$ är liten. I så fall:

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{2} h^T f''(a+sh) h}_{>0} > 0$$

för alla h med $|h|$ litet.

Alltså: lok. min. i a .

Det bevisar a). De andra
 fallen bevisas på liknande vis.

[Undersök de krit. punkterna till f .]
 Lösningens metod.

1) Krit. punkter ges av

$$f'(x)^T = 0$$

~~Linjär~~ Ekvationssystem. Lösas för
 hand eller bättre med Newtons
 metod.

2) För varje kritisk punkt a ställer
 vi upp Hesse-matrisen

$$H(a) = f''(a).$$

egenvärdena beräknas. Om alla
egenvärden är > 0 så har
vi lok. min i a .

Och så vidare.

Obs att Hesse-matrisen är
Jacobi-matrisen till $f'(x)^T$.

Använd ej "Remark" på
sid 748. Det är en

ointressant handräknings-
metod som bara fungerar
då $N=2$. ~~AV~~

(Ger noll poäng på tentan!!)

Datorövning 3

(12)

Undersök kritiska punkter
för $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = 0,$$

Skriv funktionsfil `funk1.m`
som implementerar $y = f(x)$.

Skriv funktionsfil `gradfunk1.m`
som implementerar $g = f'(x)^T$
med hjälp av `jacobi.m` och `funk1.m`.

Lös $f'(x)^T = 0$ med `newton.m`
och `gradfunk1.m`.

Beräkna Hesse-matrisen
med `jacobi.m` och `gradfunk1.m`.

