

Sats 3 (Andra-derivata-testet)

Antag $a = (a_1, \dots, a_n)$ en kritisk punkt till

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n), \quad \text{dvs } f'(a) = 0.$$

- (a) $f''(a)$ pos. def. (alla $\lambda_j > 0$) $\Rightarrow$ lok. min. i a
- (b) $f''(a)$ neg. def. (alla $\lambda_j < 0$) $\Rightarrow$ lok max i a
- (c) $f''(a)$ indefinit (något $\lambda_j > 0$, något $\lambda_i < 0$) $\Rightarrow$ sadelpunkt i a .
- (d) $f''(a)$ ej pos., neg., eller indefinit (alla $\lambda_j \geq 0$ med något $\lambda_i = 0$ eller alla $\lambda_j \leq 0$ med något $\lambda_i = 0$)
 $\Rightarrow$ ingen information

I fall (d) är $f''(a)$ pos. eller neg. semidefinit.

Metod för undersökning av kritiska punkter. (Datorövning 3)

1) Kritiska punkter ges av ekv. systemet

$$f'(x)^T = 0 \quad (\text{kolonn-matris})$$

Löses med Newtons metod.

Skriv funktionsfil `funk1.m` för $y = f(x)$.

Skriv funktionsfil `gradfunk1.m` som

beräknar $g = f'(x)^T$ med `funk1.m` och `jacobi.m`.

2) För varje kritisk punkt beräknas Hesse-matrisen $f''(a)$. Detta är Jacobi-matrisen till $f'(x)^T$ i a . Sedan beräknas egenvärdena.

Exempel $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$

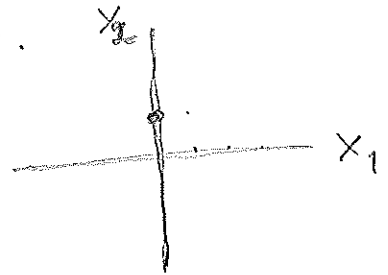
(2)

1) Kritiska punkter ges av:

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2^3 \\ 3x_1^2 x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösning: $x_1 = 0$ eller $x_2 = 0$.

dos kritiska punkter
på hela x_1 -axeln och
hela x_2 -axeln.



2) Hesse-matrisen:

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 2x_2^3 & 6x_1 x_2^2 \\ 6x_1 x_2^2 & 12x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$$

Några kritiska punkter:

a) $a = (0, 1)$, $f''(0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

Fall (d), ingen info. $f(0, 1) = 0$.

Vad är det då? Nära $a = (0, 1)$: $f(s, 1+t) = s^2(1+t)^3 \geq 0 = f(0, 1)$
för alla små s, t .

Lokalt minimum.

b) $a = (0, 0)$ $f''(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Ingen info. $f(0, 0) = 0$

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1, x_1) = x_1^5 \begin{cases} > 0 & x_1 > 0 \\ < 0 & x_1 < 0 \end{cases}$ Sadelpunkt.

Exempel 6 $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$

(3)

Kritiska punkter:

$$\begin{cases} 2xy - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + 2yz = 0 & (2) \\ y^2 + 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

(3) ger $z = -\frac{y^2}{2}$

Insätter i (2): $x^2 + 2y\left(-\frac{y^2}{2}\right) = 0$

$x^2 = y^3, \quad y = x^{2/3}$

Insätter i (1): $x \cdot x^{2/3} = 1, \quad x = 1$

Sedan $y = 1, \quad z = -\frac{1}{2}$

En kritisk punkt: $(1, 1, -\frac{1}{2})$.

Hesse-matrisen:

$$f''(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2y & 2 & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{bmatrix}$$

$$f''(1, 1, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Eigenvärden: ges av

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \underbrace{\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{(-1-\lambda)(2-\lambda)-4} - 2 \cdot 2(2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda) \left((-1-\lambda)(2-\lambda) - 4 - 4 \right) = 0$$

$$2-\lambda = 0 \text{ eller } \lambda^2 - \lambda - 10 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 10}$$

(4)

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 10} > 0$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 10} < 0$$

Orbits zeigen: Sattelpunkt.

13.2 Extremvärden i begränsade områden

(5)

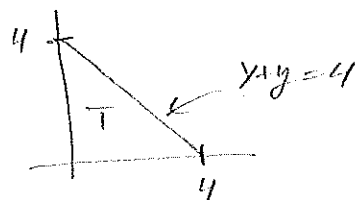
Metod

1) Bestäm alla kritiska och singulära punkter i det inre av D_f .

2) Bestäm extrempunkter på randen av D_f .

3) Jämför f mellan dessa punkter.

Exempel 2 Bestäm extremvärdena för $f(x, y) = x^2 y e^{-(x+y)}$ i triangeln T .



1) Singulära punkter: inga.
Kritiska ges av:

$$\begin{cases} 2xy e^{-(x+y)} + x^2 y e^{-(x+y)} \cdot (-1) = 0 \\ x^2 e^{-(x+y)} + x^2 y e^{-(x+y)} \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(2-x) = 0 & (1) \\ x^2(1-y) = 0 & (2) \end{cases}$$

(6)

$$(1) \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } y=0 \text{ eller } x=2$$

$$(2) \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } y=1$$

Kritiska punkter: $(0, y)$ och $(2, 1)$.

Endast $(2, 1)$ är inre punkt till T .

$$f(2, 1) = 4e^{-3}$$

$$2) \text{ På randen } x=0: f(0, y) = 0$$

$$\text{På randen } y=0: f(x, 0) = 0$$

$$\text{På randen } \begin{cases} x+y=4 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}: f(x, 4-x) = x^2(4-x)e^{-(x+4-x)} = x^2(4-x)e^{-4}$$

$$g(x) = x^2(4-x)e^{-4} = (4x^2 - x^3)e^{-4}$$

$$g'(x) = (8x - 3x^2)e^{-4} = x(8-3x)e^{-4} = 0$$

$$x=0 \text{ eller } x = \frac{8}{3}, \quad 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Obs: } g(0) = 0, g(4) = 0 \text{ (ändpunkterna)}$$

$$f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{64 \cdot 4}{27} e^{-4} = \frac{256}{27} e^{-4}$$

$$3) \text{ Jämför: } f(0, y) = 0 = f(x, 0) = 0$$

$$f(2, 1) = 4e^{-3} \approx 0.199$$

$$f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{256}{27} e^{-4} \approx 0.174 < f(2, 1)$$

$$\text{Max} = f(2, 1)$$

$$\text{Min} = 0 \text{ antas på randen } x=0 \text{ och rand } y=0.$$